Écoulement des fluides

Dynamique des fluides réels

par **André LALLEMAND**
Ingénieur, Docteur ès sciences
Professeur des universités à l'Institut national des sciences appliquées de Lyon

*La **dynamique des fluides réels** est dominée par les forces de **viscosité moléculaire**, d'une part, par leur importance vis-à-vis des forces d'inertie de l'écoulement, d'autre part. Lorsque les forces de viscosité sont importantes par rapport aux forces d'inertie, l'écoulement est régulier, le champ des vitesses, ou plus généralement des paramètres du fluide, varie de façon monotone aussi*

Toute reproduction sans autorisation du Centre français d'exploitation du droit de copie est strictement interdite.
©Techniques de l'Ingénieur, traité Génie énergétique

bien dans l'espace que, éventuellement, dans le temps. Dans ce type d'écoulement, dit ***laminaire****, toute instabilité est dissipée par la viscosité du fluide. Ceci n'est pas le cas dès que les forces d'inertie deviennent importantes par rapport aux forces de viscosité. Les instabilités, inévitables en pratique, se développent sous forme de tourbillons de tailles variées : l'écoulement devient* ***turbulent****. Dans ce mode d'écoulement, tous les transferts sont améliorés, ce qui est un avantage, mais les irréversibilités sont plus importantes, ce qui est évidemment un inconvénient.*

Du fait de la viscosité, toute présence de paroi matérielle implique une évolution relativement forte dans le champ des vitesses. Si l'écoulement est du type « ***externe*** *», c'est-à-dire lorsque les parois n'occupent qu'une petite partie de l'écoulement, les variations ne se font sentir que dans une zone proche des parois appelée* ***couche limite****. En dehors de cette couche limite, l'écoulement se comporte comme un écoulement de gaz parfait. Dans les écoulements «* ***internes*** *», pour lesquels les parois délimitent une zone d'écoulement relativement faible, tout le champ des vitesses est soumis à des gradients.*

Quel que soit le type d'écoulement, les ***équations générales de bilans*** *(masse, quantité de mouvement et énergie) sont applicables. La résolution analytique de ces équations aux dérivées partielles, généralement couplées, est cependant impossible dans la très grande majorité des cas pratiques. Des résolutions numériques s'imposent alors. Ceci est vrai pour les écoulements laminaires ; cela devient une règle générale pour les écoulements turbulents. En effet, les fluctuations des paramètres thermocinématiques du fluide introduisent des inconnues supplémentaires qui compliquent de façon très importante la résolution. La méthode la plus employée actuellement dans les problèmes industriels est la méthode statistique dans laquelle on ne s'intéresse plus qu'aux valeurs moyennes des paramètres de l'écoulement. Du fait de la non-linéarité des équations de base, cette méthode impose de modéliser les fluctuations et d'introduire un certain nombre d'équations supplémentaires, dites* ***équations de fermeture****, et de coefficients qui nécessitent un calage sur l'expérience. Parmi les différents modèles étudiés et proposés par les spécialistes, le plus courant est celui qui utilise la notion de* ***viscosité turbulente*** *et des équations de fermeture basées sur les transferts de l'****énergie cinétique turbulente k*** *et* ***de son taux de dissipation*** *ε. Pour faciliter la résolution de problèmes industriels, divers logiciels sont proposés par des sociétés spécialisées dans ce domaine.*

Pour les notations et symboles, se reporter en fin d'article.

1. Régimes d'écoulement

En écoulement de fluide réel, on distingue deux grands types de comportement. Chacun de ces comportements caractérise un régime d'écoulement particulier : le régime laminaire et le régime turbulent.

L'écoulement d'un fluide est dit **laminaire** lorsqu'il est strictement permanent ou lorsque le champ de vitesse évolue de façon continue et ordonnée en fonction du temps et de l'espace. Pour un tel écoulement d'un fluide réel, la vitesse peut avoir une intensité variable dans une section droite à cause de la viscosité. La vitesse est nulle pour les particules voisines de toute surface matérielle immobile et maximale pour les points les plus éloignés. Dans ce type d'écoulement, en régime permanent, les trajectoires (qui sont alors confondues avec les lignes de courant) ne se coupent jamais au cours de l'écoulement (figure **1**).

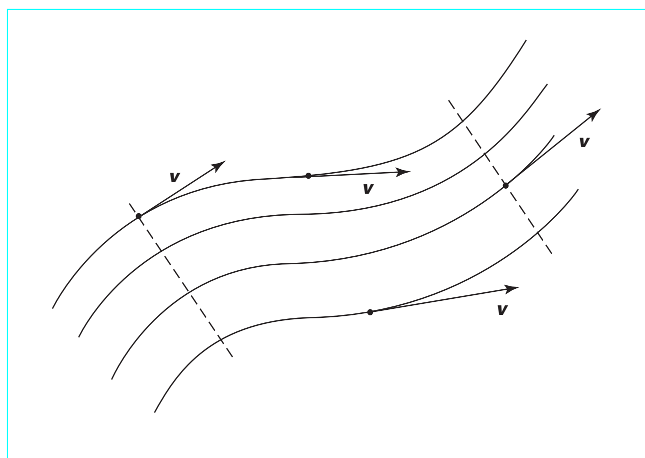


Figure 1 – Schématisation des lignes de courant d'un écoulement laminaire

Pour les écoulements **turbulents** le régime permanent n'existe pas. On ne peut constater, dans certains cas, qu'un régime permanent en moyenne, encore appelé : pseudo-permanent dans lequel les trajectoires s'enchevêtrent. En effet, l'observation d'un tel écou-

Toute reproduction sans autorisation du Centre français d'exploitation du droit de copie est strictement interdite.
©Techniques de l'Ingénieur, traité Génie énergétique

lement montre que si, dans l'ensemble ou en moyenne, les particules fluides s'écoulent bien dans une direction donnée, en tout point, quel que soit le temps "macroscopique", la vitesse observée à cette échelle n'est en fait qu'une vitesse moyenne. L'observation à une échelle de temps plus réduite fait apparaître un mouvement désordonné des particules de fluide. A partir de ce constat, pour les écoulements pseudo-permanents, Reynolds (1883) a proposé de décomposer la vitesse de chacune de ces particules en une **vitesse moyenne** $\bar{\boldsymbol{v}}$, dont les lignes de courant, confondues avec les trajectoires, rappellent celles de l'écoulement laminaire, et une vitesse aléatoire $\boldsymbol{v}'$ (figure **2**) dont la moyenne faite sur un temps suffisamment long est nulle. On a :

$$\boldsymbol{v} = \bar{\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{v}' \qquad (1)$$

Cette caractéristique des écoulements turbulents rend délicate leur résolution par les équations de bilan, notamment celle de la quantité de mouvement. L'objet d'une partie de cet article est de fournir des informations sur les méthodes de résolution de tels écoulements.

L'expérience montre que, pour un même fluide circulant dans un milieu matériel donné, l'écoulement est laminaire aux faibles vitesses et devient turbulent pour des vitesses importantes. Le passage de l'un à l'autre de ces types d'écoulement dépend de l'importance relative des forces d'inertie et de viscosité. Le rapport de ces forces, qui apparaissent dans l'équation de Navier [BE 8 153], conduit à un nombre sans dimension appelé : **nombre de Reynolds** *Re* [BE 8 159]. Lorsque les forces de viscosité sont grandes par rapport aux forces d'inertie (faible nombre de Reynolds), l'écoulement est stabilisé : c'est un écoulement laminaire. Si, par contre, les forces d'inertie l'emportent sur les forces de viscosité (fort nombre de Reynolds), l'écoulement devient turbulent.

Exemple : pour une **canalisation cylindrique à base circulaire**, pour laquelle :

$$Re = \frac{\bar{v}_d D}{\nu}$$

avec $\bar{v}_d$ vitesse moyenne capable du débit,

D diamètre de la canalisation,

ν viscosité cinématique du fluide,

on note que, quel que soit le fluide :

— pour $Re < 2\,000$ l'écoulement est laminaire ;
— pour $Re > 10\,000$ l'écoulement est turbulent.

Lorsque le nombre de Reynolds est compris entre ces deux valeurs, le type d'écoulement dépend d'un certain nombre d'autres facteurs dont l'état de la canalisation. Le régime d'écoulement est dit de **transition**.

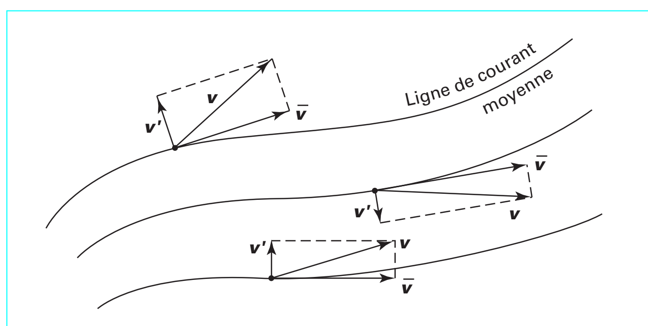


Figure 2 – Lignes de courant moyennes et vitesses dans un écoulement turbulent

2. Couches limites

2.1 Définitions

La viscosité d'un fluide réel en écoulement implique toujours un gradient de vitesse plus ou moins important au voisinage des parois. En effet, les particules de fluide au contact des parois doivent avoir la même vitesse que la paroi alors que la vitesse est en général très différente loin de cette paroi. Ainsi, dans certains types d'**écoulements**, qualifiés d'externes, on peut distinguer, dans une section perpendiculaire à la paroi, deux zones : l'une dans laquelle la vitesse varie de manière significative, l'autre, dans laquelle la vitesse est pratiquement constante. La première zone est appelée **couche limite cinématique**. Elle est généralement de dimension très limitée par rapport à l'ensemble du fluide en écoulement. La deuxième zone, dans laquelle la vitesse est constante, est souvent appelée zone d'**écoulement potentiel** car l'écoulement y est généralement irrotationnel ([BE 8 151], § 5.2).

Pour illustrer l'existence de ces deux zones, considérons (figure **3**) un fluide s'écoulant librement à la vitesse uniforme $\boldsymbol{V}$ à travers une section droite de dimensions infinies et une plaque mince semi-infinie parallèle au sens de l'écoulement. Le fluide étant visqueux, la vitesse doit être nulle au contact de la plaque. L'expérience montre que, sur une normale à la plaque, la vitesse passe de la valeur 0 à $x_2 = 0$ à une valeur proche de $\boldsymbol{V}$ pour $x_2 = \delta$. Par convention, la couche limite aura pour frontière la courbe $x_2 = \delta$ telle que, en tout point de cette courbe, $v_1 = 0{,}99V$. Dans le cas des fluides peu visqueux comme l'eau (et a fortiori les gaz), δ varie faiblement avec x_1. Dans la couche limite $\frac{\partial v_1}{\partial x_2}$ est très important (transfert d'impulsion important). A l'extérieur de la couche limite ce gradient de vitesse est pratiquement nul ; les effets de la viscosité y sont négligeables.

Ainsi, il est légitime, **à l'extérieur de la couche limite**, d'assimiler, sur le plan de l'écoulement, le fluide réel à un **fluide parfait**. Dans cette zone, l'écoulement est effectivement irrotationnel, ce qui justifie l'appellation d'**écoulement potentiel**.

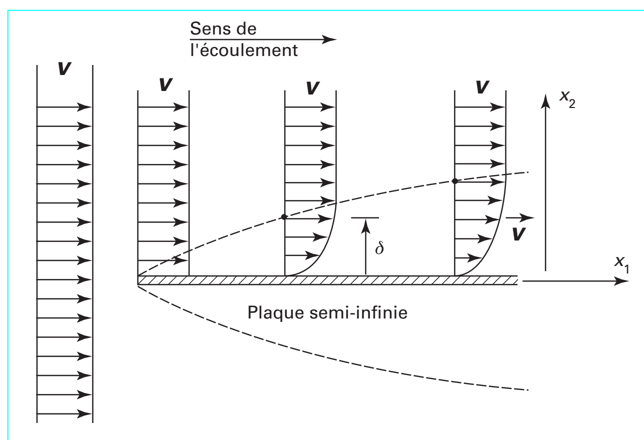


Figure 3 – Développement d'une couche limite au voisinage d'une paroi

Toute reproduction sans autorisation du Centre français d'exploitation du droit de copie est strictement interdite.
©Techniques de l'Ingénieur, traité Génie énergétique

Dans l'écoulement d'un fluide, la présence d'une paroi n'influe pas seulement sur la vitesse. Si la température du fluide est différente de celle de la paroi, des transferts de chaleur se produisent entre le fluide et la paroi si celle-ci n'est pas adiabatique. On constate alors que, dans toute section normale à la paroi, la température varie dans une zone limitée, proche de la paroi. Cette zone est appelée **couche limite thermique**. Elle est en général différente de la couche limite cinématique.

2.2 Épaisseurs des couches limites

La couche limite peut être considérée comme une zone dans laquelle l'écoulement du fluide est « perturbé » par la présence d'une paroi. Cette perturbation joue sur différentes grandeurs liées à l'écoulement : sa vitesse, son débit, sa quantité de mouvement, sa puissance cinétique, son enthalpie, etc. A chacun de ces types de perturbation, on attache une épaisseur de couche limite.

2.2.1 Couche limite cinématique ou dynamique

Dans cette couche limite, on utilise fréquemment trois définitions d'épaisseur de couche limite (figure **4**).

■ **Épaisseur cinématique** δ

L'épaisseur cinématique δ de la couche limite est définie conventionnellement à partir du rapport entre la vitesse du fluide sur la frontière $(v_1)_\delta$ et sa vitesse V loin de la paroi, dans la même section normale à la paroi (figure **4*a***). Ce rapport est en général pris égal à 0,99, ce qui signifie que, dans la zone potentielle, la variation du vecteur vitesse reste inférieure à 1 %. On a :

$$v_1 = 0{,}99\ V \text{ à } x_2 = \delta \tag{2}$$

■ **Épaisseur de déplacement** δ^*

L'épaisseur de déplacement δ^* est l'épaisseur, au voisinage de la paroi, qui ne devrait pas contenir d'écoulement si la vitesse du fluide était constante, et égale à celle de l'écoulement potentiel V, pour avoir le même débit (figure **4*b***). Suivant cette définition et en notant par $\dot{V}_\ell$ le débit volumique par unité de longueur dans la couche limite, supposée bidimensionnelle, on a :

$$\dot{V}_\ell = \int_0^\delta v_1\, \mathrm{d}x_2 = V(\delta - \delta^*) \tag{3}$$

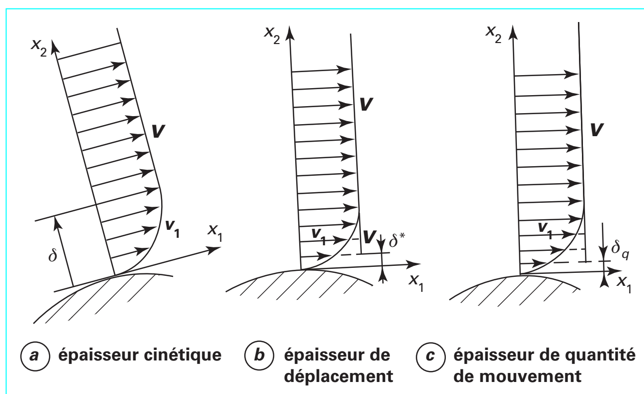


Figure 4 – Définition des épaisseurs de la couche limite cinématique

Comme :

$$\delta = \int_0^\delta \mathrm{d}x_2$$

on a :

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{v_1}{V}\right) \mathrm{d}x_2 \tag{4}$$

> **Exemple :** on démontre, que dans le cas d'un **écoulement laminaire** :
>
> $$\delta^* = \delta / 3$$

■ **Épaisseur de quantité de mouvement** δ_{qm} **ou épaisseur dynamique**

L'épaisseur de quantité de mouvement δ_{qm} est l'épaisseur, au voisinage de la paroi, qui ne devrait pas comporter d'écoulement pour que la perte de flux de quantité de mouvement, si la vitesse valait partout V, soit la même que dans le cas réel (figure **4 *c***). Dans le cas réel, la perte de flux de quantité de mouvement vaut (pour une épaisseur unité d'écoulement en écoulement bidimensionnel, ρ étant la masse volumique du fluide supposé incompressible) :

$$\int_0^\infty \rho v_1\, \mathrm{d}x_2\ (V - v_1) \approx \int_0^\delta (V - v_1)\ \rho v_1\ \mathrm{d}x_2 \tag{5}$$

Dans le cas fictif à vitesse constante, la perte de flux de quantité de mouvement est :

$$\rho V\, \delta_{qm}\, V$$

Ainsi :

$$\delta_{qm} = \int_0^\delta \frac{v_1}{V}\left(1 - \frac{v_1}{V}\right) \mathrm{d}x_2 \tag{6}$$

> **Exemple :** pour un **écoulement laminaire**, on montre que :
>
> $$\delta_{qm} \approx \delta / 7\ .$$

2.2.2 Couche limite thermique

■ **Épaisseur thermique** δ_T

L'épaisseur thermique δ_T de la couche limite est définie conventionnellement à partir de la différence mesurée entre la température du fluide sur la frontière de la couche limite T_{δ_T} et sa valeur T_p à la paroi, rapportée à la différence entre la température T_∞ loin de la paroi et T_p, dans la même section normale à la paroi (figure **5*a***). On note que :

$$\text{pour } x_2 = \delta_T \text{, on doit avoir : } \frac{T_{\delta_T} - T_p}{T_h - T_p} = 0{,}99 \tag{7}$$

■ **Épaisseur enthalpique** δ_Θ

L'épaisseur enthalpique δ_Θ est l'épaisseur, au voisinage de la paroi, qui ne devrait pas comporter d'écoulement pour que la perte (ou le gain) de flux d'enthalpie totale, si l'enthalpie totale valait partout H_t, soit la même que dans le cas réel (figure **5*b***). Dans le cas réel, la perte de flux enthalpique vaut (pour une épaisseur unité d'écoulement, en écoulement bidimensionnel) :

$$\int_0^\infty \rho v_1\ \mathrm{d}x_2\ (H_t - h_t) \approx \int_0^{\delta \text{ ou } \delta_T} (H_t - h_t)\ \rho v_1\ \mathrm{d}x_2 \tag{8}$$

La borne supérieure d'intégration à prendre est celle qui correspond à la plus grande valeur. Dans le cas fictif à enthalpie totale constante, la perte de flux enthalpique est :

$$\rho\, H_t\, \delta_\Theta\, V$$

Toute reproduction sans autorisation du Centre français d'exploitation du droit de copie est strictement interdite.
©Techniques de l'Ingénieur, traité Génie énergétique

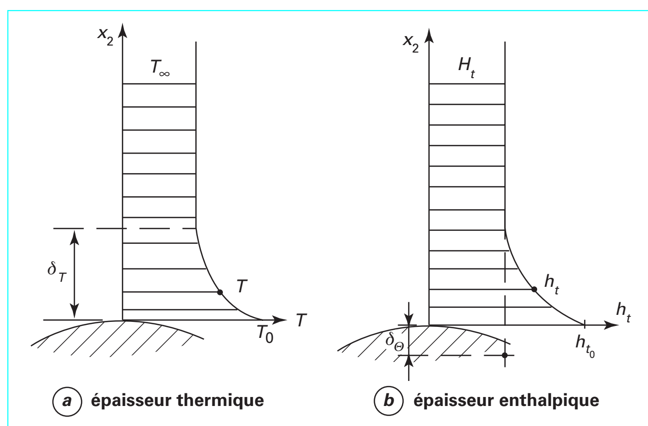


Figure 5 – Définition des épaisseurs de la couche limite thermique

Ainsi :

$$\delta_\Theta = \int_0^{\delta \text{ ou } \delta_T} \frac{v_1}{V}\left(1 - \frac{h_t}{H_t}\right) \mathrm{d}x_2 \quad \textbf{(9)}$$

Dans cette relation, considérant que les énergies cinétiques et potentielles sont souvent négligeables devant l'énergie thermique, l'enthalpie totale est souvent remplacée par l'enthalpie ou directement par la quantité $c_p\, T$ (où c_p est la capacité thermique massique sous pression constante du fluide) qui dans beaucoup de cas correspond à l'enthalpie du fluide. On a alors :

$$\delta_\Theta = \int_0^{\delta_T \text{ ou } \delta} \frac{v_1}{V}\left(1 - \frac{T}{T_\infty}\right) \mathrm{d}x_2 \quad \textbf{(10)}$$

2.3 Transition dans la couche limite

Dans l'exemple de la figure **3**, près du bord d'attaque de la plaque, dans la couche limite, l'écoulement est toujours laminaire. A une certaine distance de ce bord d'attaque, l'écoulement peut devenir turbulent (figure **6**). Cette distance dépend de la valeur de V. La limite d'apparition de la turbulence est caractérisée par une brusque augmentation de la dérivée de δ par rapport à x_1 et du cisaillement ou de $\frac{\partial v_1}{\partial x_2}$ à la paroi. Le point où se produit la transition x_{1t} est donné par le nombre de Reynolds de couche limite :

$$Re_{xt} = \frac{V\, x_{1t}}{\nu}$$

Re_{xt} est le l'ordre de 3×10^5.

Cependant, la zone laminaire existe quel que soit le niveau de turbulence qui peut avoir lieu dans le courant libre. En effet, dans la partie turbulente de la couche limite, les fluctuations propres à la turbulence tendent graduellement vers 0 au voisinage immédiat de la paroi. Ainsi, il persiste toujours un film laminaire entre la paroi et la zone turbulente. La présence de ce film laminaire, dit encore **sous-couche limite laminaire**, est due au fait que dans cette zone la compétition entre les forces de viscosité et les forces d'inertie tourne à l'avantage des premières du fait de la forte valeur du gradient de la vitesse d'une part, de la faible valeur de la vitesse (qui tend vers 0 à la paroi) d'autre part.

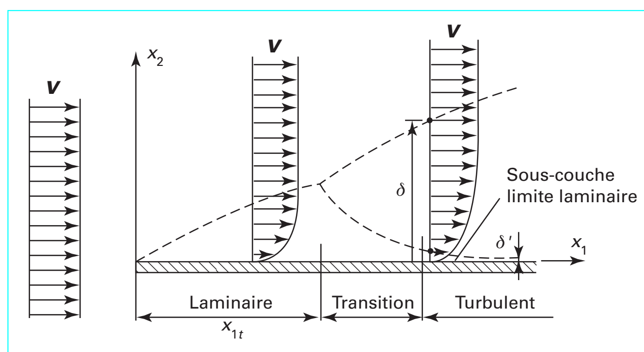


Figure 6 – Transition dans la couche limite

2.4 Pression dans la couche limite

Dans la couche limite d'une paroi plane, les lignes de courant sont quasiment parallèles entre elles bien que la chute de débit dans la couche limite entraîne la présence d'une composante normale de la vitesse. Cette constatation conduit à adopter très souvent l'hypothèse de la **constance de la pression** [BE 8 153] suivant une normale à la paroi (surtout dans le cas de fluides peu visqueux). Cette remarque, dont le résultat sera démontré dans le paragraphe suivant, est très importante car elle permet de connaître la pression sur la paroi à partir d'une étude des pressions hors de la couche limite, où le fluide peut être considéré comme parfait.

2.5 Équations de bilans dans une couche limite bidimensionnelle

Les équations de la couche limite sont des formes simplifiées des équations générales de bilans qui sont données dans l'article [BE 8 153] *Écoulement des fluides. Équations de bilans*. Les simplifications sont obtenues en analysant les **échelles caractéristiques** liées aux grandeurs considérées dans la couche limite.

2.5.1 Bilan de la masse-équation de continuité

Si on se limite au cas d'un **fluide incompressible** en **écoulement permanent**, l'équation de continuité s'écrit :

$$\mathrm{div}\, \boldsymbol{v} = 0$$

soit :

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0$$

En admettant que la couche limite se développe sur une plaque plane infinie dans la direction $\boldsymbol{x_3}$ que l'on prend, a priori, perpendiculaire à la vitesse à l'infini, on a :

$$v_3 = 0.$$

L'écoulement est **bidimensionnel.**

L'analyse basée sur les échelles caractéristiques permet de noter les ordres de grandeur suivants :

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} \sim \frac{V}{\ell}\,; \qquad \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \sim \frac{V'}{\delta}$$

Toute reproduction sans autorisation du Centre français d'exploitation du droit de copie est strictement interdite.
©Techniques de l'Ingénieur, traité Génie énergétique

avec $V = v_\infty$ l'échelle caractéristique de la vitesse selon la direction $\boldsymbol{x_1}$,

ℓ la longueur caractéristique selon $\boldsymbol{x_1}$, correspondant à la distance du point considéré au « bord d'attaque » de la plaque,

δ la longueur caractéristique selon $\boldsymbol{x_2}$, égale à l'épaisseur de la couche limite dans la section considérée,

V' la vitesse caractéristique selon $\boldsymbol{x_2}$.

Si on élimine dans l'analyse les points rapprochés du bord d'attaque, $\delta << \ell$ et $V' << V$ (puisqu'à l'amont de la plaque $v_2 = 0$), on constate que les gradients de vitesse sont du même ordre de grandeur. On ne peut donc pas en négliger un vis-à-vis de l'autre. Ainsi, l'équation de la conservation de la masse dans la couche limite bidimensionnelle garde sa forme générale :

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0 \quad \textbf{(11)}$$

2.5.2 Bilan de la quantité de mouvement

Considérant le cas d'un fluide **incompressible**, **newtonien**, **pesant** (c'est-à-dire soumis aux seules forces de la pesanteur comme forces de champ) en **écoulement permanent**, **bidimensionnel**, les composantes de l'équation de Navier-Stokes ([BE 8 153], § 3.2) s'écrivent :

(a) $$v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P^*}{\partial x_1} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2}\right)$$

(b) $$v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P^*}{\partial x_2} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2}\right)$$

avec $P^* = P + \varpi z$ pression étoilée,

P pression et z altitude du point considéré,

$\varpi = \rho g$ poids volumique du fluide.

L'analyse des échelles caractéristiques permet d'écrire, dans (a) :

$$v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \sim V\frac{V}{\ell} \quad ; \quad v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \sim V\frac{V'}{\delta}$$

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} \sim \frac{V}{\ell^2} \quad ; \quad \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} \sim \frac{V}{\delta^2}$$

dans (b) :

$$v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \sim \frac{V}{\ell}V' \quad ; \quad v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \sim V'\frac{V'}{\delta}$$

$$\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} \sim \frac{V'}{\ell^2} \quad ; \quad \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} \sim \frac{V'}{\delta^2}$$

Ainsi, compte tenu des ordres de grandeur de V par rapport à V' et de ℓ par rapport à δ, pour des points situés suffisamment loin du bord d'attaque de la plaque, les termes dont l'ordre de grandeur est V/ℓ^2 ou V'/ℓ^2 peuvent être négligés par rapport aux termes d'ordre de grandeur V/δ^2 ou V'/δ^2 respectivement. Ainsi les équations scalaires (a) et (b) deviennent :

$$v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P^*}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} \quad \textbf{(12)}$$

$$v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P^*}{\partial x_2} + \nu \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} \quad \textbf{(13)}$$

Si on admet a priori que, dans chacune de ces équations, les termes représentant les forces de pression et d'inertie sont du même ordre de grandeur, on peut écrire :

$$\text{pour (a)} \quad \Rightarrow \frac{1}{\rho}\frac{\partial P^*}{\partial x_1} \sim V\frac{V'}{\delta} \sim V\frac{V}{\ell}$$

$$\text{pour (b)} \quad \Rightarrow \frac{1}{\rho}\frac{\partial P^*}{\partial x_2} \sim V\frac{V'}{\ell} \sim V'\frac{V'}{\delta}$$

ce qui, compte tenu des diverses échelles, permet de conclure à :

$$\frac{\partial P^*}{\partial x_2} << \frac{\partial P^*}{\partial x_1}$$

Ainsi on admettra que, dans la couche limite :

$$\frac{\partial P^*}{\partial x_2} \approx 0$$

donc que :

$$P^* = f(x_1)$$

La pression étoilée (mais également la pression, du fait de la faible valeur de δ) est constante dans une section droite de la couche limite. Ce résultat est une démonstration de la conclusion énoncée dans le paragraphe 2.4.

Par définition, hors de la couche limite $\frac{\partial v_1}{\partial x_2} \cong 0$. Alors, en appliquant l'équation de Navier-Stokes dans l'écoulement potentiel (hors de la couche limite) où le fluide s'écoule comme un fluide parfait, on a :

$$V\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x_1} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P^*}{\partial x_1}$$

Cette expression, qui donne le gradient de P^* hors de la couche limite, donne également le gradient de pression existant dans la couche limite puisque $\partial P^*/\partial x_2 = 0$ en tout point de l'écoulement.

2.5.3 Bilan de l'énergie

Pour un fluide en **écoulement permanent** dans lequel on peut négliger la dissipation visqueuse et l'effet du travail des forces de pression devant les transferts d'énergie thermique, l'équation de l'énergie s'écrit ([BE 8 153], § 5.4) :

$$\rho \boldsymbol{v}\ \mathbf{grad}\ h = \mathrm{div}\ \lambda\ \mathbf{grad}\ T \quad \textbf{(14)}$$

Si les **caractéristiques thermophysiques** du fluide peuvent être considérées comme **constantes**, avec une enthalpie massique h égale à $c_p T$, on peut écrire, en **écoulement bidimensionnel** :

$$\rho c_p\left(v_1\frac{\partial T}{\partial x_1} + v_2\frac{\partial T}{\partial x_2}\right) = \lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2}\right) \quad \textbf{(15)}$$

où λ est la conductivité thermique du fluide. En faisant un développement aux ordres de grandeurs, comme ci-dessus, on remarque que :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} << \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2}$$

alors que :

$$v_1\frac{\partial T}{\partial x_1} \sim v_2\frac{\partial T}{\partial x_2}$$

Ainsi, l'équation de l'énergie est réduite à :

$$\rho c_p\left(v_1\frac{\partial T}{\partial x_1} + v_2\frac{\partial T}{\partial x_2}\right) = \lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2}\right) \quad \textbf{(16)}$$

Toute reproduction sans autorisation du Centre français d'exploitation du droit de copie est strictement interdite.
© Techniques de l'Ingénieur, traité Génie énergétique

2.5.4 Système d'équations de bilans

En définitive, les équations de bilans de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie dans la **couche limite bidimensionnelle d'un fluide incompressible, newtonien s'écoulant en régime permanent**, se réduisent à :

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0$$

$$v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = V \frac{dV}{dx_1} + \nu \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} \quad \textbf{(17)}$$

$$\rho c_p \left(v_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial T}{\partial x_2} \right) = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2}$$

avec :

$$\frac{\partial P^*}{\partial x_2} \approx 0 \text{ et } \frac{1}{\rho} \frac{\partial P^*}{\partial x_1} = -V \frac{dV}{dx_1} \quad \textbf{(18)}$$

où $V = v_\infty$ est la vitesse du fluide dans l'écoulement potentiel à l'abscisse x_1.

La résolution de ce système d'équations, appelées **équations de Prandtl**, fait appel à des hypothèses dont l'une des plus courantes est l'hypothèse de la similitude des profils qui conduit à la solution de Blasius lorsque $\frac{dV}{dx_1} = 0$ (voir § 3.3) ou à celle de Falkner et Skan si $\frac{dV}{dx_1} \neq 0$. La méthode semi-intégrale de Karman utilise, quant à elle, une équation polynomiale du profil des vitesses. Le développement de ces méthodes peut être vu, par exemple, dans Candel [1], Padet [2], Cousteix [3] ou Guyon et *al* [4].

2.6 Allure de la couche limite

La résolution des équations (17) donne la forme de la couche limite. Sans procéder à cette résolution, on peut avoir une idée de son allure en utilisant également les échelles caractéristiques. Pour cela, on admet que, dans la couche limite, les forces d'inertie, qui correspondent aux termes du premier membre de l'équation du bilan de la quantité de mouvement, et celles de viscosité (deuxième terme du membre de droite) sont du même ordre de grandeur. Ainsi :

$$v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \sim \frac{V^2}{\ell} \sim \nu \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} \sim \nu \frac{V}{\delta^2}$$

On en tire :

$$\delta^2 \sim \frac{\nu \ell}{V} \text{ d'où } \delta \propto \sqrt{\ell} \quad \textbf{(19)}$$

La couche limite a donc une forme parabolique en fonction de sa distance au bord d'attaque de la plaque. On peut également écrire, en utilisant le nombre de Reynolds longitudinal :

$$\delta \sim \frac{1}{\sqrt{Re_\ell}} \ell \text{ avec } Re_\ell = \frac{V\ell}{\nu} \text{ soit } \delta \propto \frac{1}{\sqrt{Re_\ell}} \ell$$

La résolution des équations (cf. § 3.3) conduit à :

$$\delta \approx \frac{5}{\sqrt{Re_\ell}} \ell$$

Pour la couche limite thermique, on a :

$$v_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} \sim a \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} \text{ soit } V \frac{T}{\ell} \sim a \frac{T}{\delta_T^2}$$

où a est la diffusivité thermique du fluide ($\lambda/\rho c_p$). On note ainsi que :

$$\delta_T^2 \sim \frac{a}{V} \ell \text{ ou } \delta_T \propto \sqrt{\ell} \quad \textbf{(20)}$$

donc que l'évolution de la couche limite thermique doit aussi être parabolique. On peut également écrire :

$$\delta_T^2 \sim \frac{a}{\nu} \frac{\nu}{V\ell} \ell^2 = \frac{\ell^2}{Re_\ell Pr} \text{ ou } \delta_T \sim \frac{\ell}{\sqrt{Pe}}$$

avec $Pr = \nu/a$ le nombre de Prandtl,
$Pe = Re\,Pr$ le nombre de Péclet.

On note que le rapport des épaisseurs des couches limites cinématique et thermique ne dépend que du nombre de Prandtl. En effet :

$$\frac{\delta_T}{\delta} \sim \sqrt{\frac{Re}{Pe}} = \frac{1}{\sqrt{Pr}}$$

Si le nombre de Prandtl est voisin de l'unité, ce qui est le cas des gaz, les épaisseurs des deux couches limites sont voisines. Par contre, pour les très faibles nombres de Prandtl, ce qui est le cas des métaux liquides, par exemple, $\delta_T >> \delta$.

3. Écoulements laminaires

Dans la pratique, les équations de bilans [BE 8 153], qui sont toutes des équations différentielles aux dérivées partielles, très souvent couplées entre elles, ne permettent d'obtenir des solutions analytiques des écoulements que dans très peu de cas simples. Dans la très grande majorité des cas, les résolutions doivent être entièrement numériques. Cependant, l'**écoulement laminaire** peut être résolu de façon analytique, dans le cas des **fluides incompressibles newtoniens** par les équations de Navier-Stokes pour certaines configurations d'**écoulements conservatifs** en **régime permanent**. Selon les conditions aux limites, les résultats diffèrent. Parmi ces solutions analytiques, on peut citer celles qui sont relatives aux écoulements suivants :

— l'écoulement de Poiseuille ou laminaire en conduite cylindrique à base circulaire ;

— l'écoulement de Hagen-Poiseuille ou écoulement laminaire entre deux plans, ou deux cylindres coaxiaux de grands diamètres par rapport à l'entrefer, dont l'un est mobile (écoulement de Couette) ;

— les écoulements "rampants" ou écoulement type du graissage hydrodynamique.

Des méthodes pseudo-analytiques sont aussi utilisées, par exemple, pour la résolution des couches limites laminaires.

A titre d'exemple, nous développons ici, d'une part, la résolution des écoulements de Poiseuille et de Hagen-Poiseuille, d'autre part, la résolution de la couche limite selon la méthode de Blasius.

3.1 Écoulement de Poiseuille

3.1.1 Expressions de la pression et de la vitesse

Supposons que l'**écoulement laminaire** et **permanent**, d'un **fluide newtonien pesant** et **incompressible**, soit pleinement développé

Toute reproduction sans autorisation du Centre français d'exploitation du droit de copie est strictement interdite.
©Techniques de l'Ingénieur, traité Génie énergétique

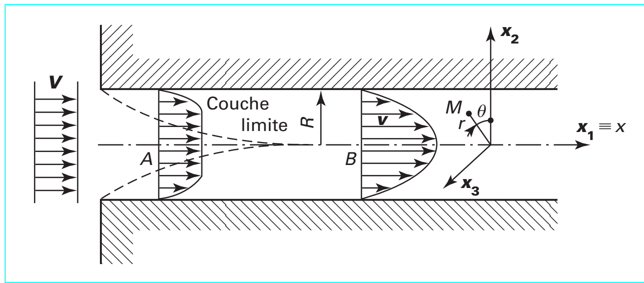


Figure 7 – Développement de l'écoulement de Poiseuille à l'entrée d'une canalisation

dans la totalité de la section d'une **conduite cylindrique**, comme c'est le cas dans la région *B* sur la figure **7**. Cette restriction exclut l'entrée *A* de la canalisation où la couche limite ne remplit pas toute une section droite. Dans la région considérée, les lignes de courant sont rectilignes et parallèles à l'axe $\boldsymbol{x_1}$ de la canalisation. Ainsi, P^* est constante en tout point d'une section droite. Par ailleurs, on peut noter que les conditions de l'écoulement impliquent les conditions cinématiques suivantes :

— la vitesse $\boldsymbol{v}$ est toujours parallèle à l'axe $\boldsymbol{x_1} \rightarrow v_2 = v_3 = 0$;
— $v_1 = 0$ à la paroi.

Dans ces conditions, l'équation de Navier-Stokes ([BE 8 153], § 3.2) s'écrit :

$$\rho \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -\,\mathbf{grad}\ P^* + \mu \nabla^2 \boldsymbol{v}$$

où $\mu = \rho\nu$ est la viscosité dynamique du fluide. En utilisant un repère de coordonnées cylindriques *x*, *r*, θ ([BE 8 153], § 3.2), et en notant que :

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0\ ;\ v_r = v_\theta = 0\ ;\ v_x = v$$

les projections de cette équation sont :

$$0 = -\frac{\partial P^*}{\partial r}$$

$$0 = \frac{1}{r}\frac{\partial P^*}{\partial \theta}$$

$$v\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P^*}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)$$

Les deux premières équations conduisent à un résultat déjà connu. Il s'agit de la répartition hydrostatique des pressions. On note alors que :

$$P^* = f(x) \qquad \textbf{(21)}$$

L'équation de conservation de la masse en régime permanent pour un fluide incompressible ([BE 8 153], § 2.1), applicable ici, se simplifie pour donner :

$$\text{div}\ \boldsymbol{v} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

On en déduit que $\boldsymbol{v}$ ne peut être fonction que de *r* et de θ. Cependant, par raison de symétrie $\boldsymbol{v}$ ne dépend pas de θ. Ainsi, on peut écrire :

$$v = f(r) \qquad \textbf{(22)}$$

et la troisième composante de l'équation de Navier s'écrit simplement :

$$\frac{\mathrm{d}P^*}{\mathrm{d}x} = \mu\left(\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right) \qquad \textbf{(23)}$$

Comme, d'une part :

$$P^* = f(x)$$

on a :

$$\frac{\mathrm{d}P^*}{\mathrm{d}x} = F(x) \qquad \textbf{(24)}$$

d'autre part :

$$v = f(r)$$

on a :

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = G(r) \qquad \textbf{(25)}$$

L'égalité (23) entre ces deux expressions nécessite donc que les fonctions *F* et *G* soient égales à une constante. On écrit :

$$F = G = -\,a$$

où *a* est une constante qui, comme nous le verrons en fin de paragraphe, est essentiellement positive.

Par intégration de (24), on a :

$$P^* = -\,ax + Cte \qquad \textbf{(26)}$$

ce qui signifie que la **pression varie linéairement avec *x*** (figure **8 *a***).

L'intégration de (25) donne :

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right) = -\frac{a}{\mu}$$

soit :

$$r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = -\frac{ar^2}{2\mu} + b$$

et :

$$v = -\frac{ar^2}{4\mu} + b\ \ln r + c \qquad \textbf{(27)}$$

Dans cette expression *a*, *b* et *c* sont des constantes ; *b* et *c* sont déterminées par les conditions aux limites :

— pour $r = 0$, $\ln r = -\infty$, ce qui donnerait une vitesse infinie sur l'axe du cylindre. Ceci étant contraire au cas réel, il faut nécessairement que $b = 0$;
— comme à la paroi, où $r = R$, la vitesse doit être nulle, on a :

$$c = \frac{aR^2}{4\mu}$$

En définitive, la vitesse *v* s'exprime par la relation :

$$v = \frac{a}{4\mu}\,(R^2 - r^2) \qquad \textbf{(28)}$$

Ainsi, on note que la vitesse varie de façon parabolique en fonction de *r*, d'une vitesse nulle pour $r = R$ à une vitesse maximale :

$$(v)_{\max} = \frac{aR^2}{4\mu}\ \text{sur l'axe (figure } \mathbf{8}\boldsymbol{b}\text{).}$$

Ce résultat montre que si l'écoulement a lieu dans le sens de $\boldsymbol{x}$, *a* doit être positif. Ceci étant, P^* décroît linéairement en fonction de *x* conformément à la figure **8*a***. Le coefficient *a* peut être déterminé par la mesure de la hauteur piézométrique P^*/ϖ en deux points 1 et 2 distants de ℓ. En effet :

$$a = \frac{P_1^* - P_2^*}{\ell} = -\frac{\Delta P_{12}^*}{\ell} \qquad \textbf{(29)}$$

En admettant que les points 1 et 2 soient situés sur la même ligne de courant, on a $v_1 = v_2$ du fait que le profil des vitesses est indépendant de la position de la section droite considérée. Alors, l'équation

Toute reproduction sans autorisation du Centre français d'exploitation du droit de copie est strictement interdite.
© Techniques de l'Ingénieur, traité Génie énergétique

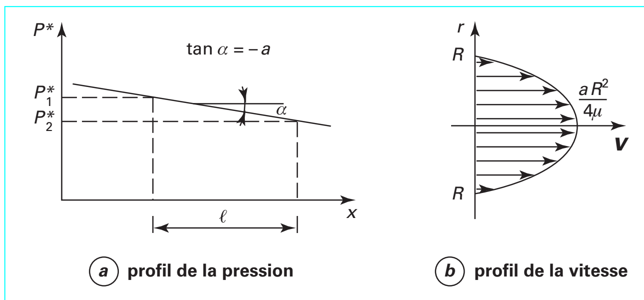


Figure 8 – Profils de la pression et de la vitesse dans une canalisation cylindrique à base circulaire, siège d'un écoulement laminaire

de Bernoulli ([BE 8 153], § 3.4), écrite pour les deux points devient simplement :

$$\frac{P_1^*}{\varpi} = \frac{P_2^*}{\varpi} + J_{12}$$

Les lignes de courant étant parallèles, P^*/ϖ ne dépend pas du point choisi dans la section droite. Cette équation est donc valable quels que soient les points 1 et 2 dans les sections droites Ω_1 et Ω_2 et J_{12} correspond donc à la perte de charge entre les deux sections. En notant par $j = J_{12}/\ell$, **la perte de charge linéique**, l'équation (29) devient :

$$a = \varpi j \qquad \textbf{(30)}$$

Le coefficient *a* correspond donc, à ϖ près, à la perte de charge linéique de l'écoulement. On note alors que :

$$P^* = -\varpi j x + P_0^* \qquad \textbf{(31)}$$

où P_0^* est la pression étoilée à $x = 0$ et :

$$v = \frac{\varpi j}{4\mu}(R^2 - r^2) \qquad \textbf{(32)}$$

3.1.2 Calcul du débit

Le fluide étant incompressible, le débit volumique est le même en toute section. Sa valeur est donnée par :

$$\dot{V} = \int_0^R v\, 2\pi r \mathrm{d}r = \frac{2\pi\varpi j}{4\mu}\int_0^R (R^2 - r^2) r\, \mathrm{d}r$$

soit :

$$\dot{V} = \frac{\pi R^4}{8\mu}\varpi j \qquad \textbf{(33)}$$

ou encore :

$$\dot{V} = -\frac{\pi R^4 \Delta P_{12}^*}{8\mu\ \ell} \qquad \textbf{(34)}$$

Cette relation indique que dans un écoulement de Poiseuille, la chute de pression et la perte de charge sont proportionnelles au débit du fluide.

3.1.3 Forces de frottement à la paroi

En général, les contraintes dues à la viscosité peuvent être tangentielles ou normales. Ici, les contraintes normales de viscosité sont nulles car en tout point :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

Les contraintes tangentielles ([BE 8 153], § 3.1.2, éq. (34)) :

$$T'_{xr} = \mu \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}$$

compte tenu de (32), sont égales à :

$$T'_{xr} = -\frac{\varpi j r}{2} = \frac{r}{2\ell}\Delta P_{12}^*$$

Ainsi, la contrainte due à la viscosité, de direction parallèle à ***x***, est une fonction linéaire de *r*. Elle est maximale à la paroi où elle vaut :

$$T'_{\max} = -\varpi j \frac{R}{2} = \frac{R \Delta P_{12}^*}{2\ell} \qquad \textbf{(35)}$$

La force exercée par le fluide sur une longueur ℓ de paroi de la conduite est :

$$F = -2\pi R \ell T'_{\max} \qquad \textbf{(36)}$$

soit : $$F = -\pi R^2 \Delta P_{12}^*$$

ou : $$F = \frac{8\mu\ell}{R^2}\dot{V} \qquad \textbf{(37)}$$

Cette force, proportionnelle à la viscosité et au débit, est égale au produit de la section Ω de la canalisation par la chute de pression étoilée ΔP_{12}^* exercée entre les deux sections considérées. Ce résultat était prévisible car, le profil des vitesses étant le même dans toute section droite, il n'y a pas de variation de quantité de mouvement du fluide. Ainsi d'après le théorème fondamental de la dynamique, la résultante des forces appliquées doit être nulle. La somme des forces de pression et de volume étant, en projection sur l'axe : $\pi R^2 \Delta P_{12}^*$ la force de frottement doit avoir ce même module.

3.1.4 Vitesses caractéristiques

■ La **vitesse capable du débit** $\bar{v}_d$ ([BE 8 153], § 2.2.1) est :

$$\bar{v}_d = \frac{1}{\Omega}\int v\, 2\pi r\, \mathrm{d}r$$

soit : $$\bar{v}_d = \frac{\varpi j R^2}{8\mu} \qquad \textbf{(38)}$$

En comparant cette valeur à la vitesse maximale :

$$v_{\max} = \frac{\varpi j R^2}{4\mu} \text{ (figure \textbf{9})}$$

on a :

$$\bar{v}_d = v_{\max}/2$$

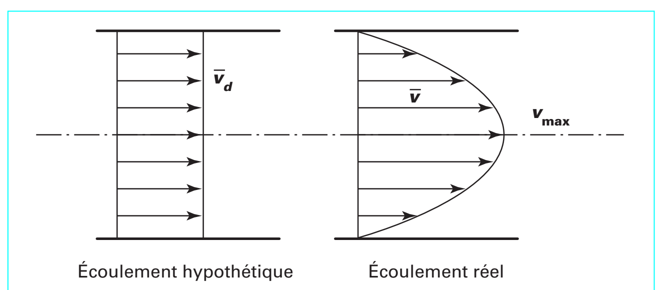


Figure 9 – Écoulement de Poiseuille et écoulement d'un fluide parfait de même débit

Toute reproduction sans autorisation du Centre français d'exploitation du droit de copie est strictement interdite.
©Techniques de l'Ingénieur, traité Génie énergétique

■ La **vitesse capable de la quantité de mouvement** ([BE 8 153], § 3.3.1) est :

$$\bar{v}_{QM}^2 = \frac{1}{\Omega}\int v^2\, 2\pi\, r\, \mathrm{d}r$$

soit :

$$\bar{v}_{QM} = \frac{\varpi\, j\, R^2}{4\sqrt{3}\mu} \qquad (39)$$

On note ainsi que :

$$\bar{v}_{QM} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\bar{v}_\mathrm{d} = \frac{v_\mathrm{max}}{\sqrt{3}}$$

■ La **vitesse capable de la puissance cinétique**

La vitesse capable de la puissance cinétique est, par définition, la vitesse constante dans la section droite qui fournirait le même flux d'énergie cinétique à travers la section (ou puissance cinétique) que l'écoulement réel. Si on note par $\bar{v}_\mathrm{c}$ cette vitesse, on a, par définition :

$$\rho\,\frac{\bar{v}_\mathrm{c}^2}{2}\,\bar{v}_c\,\Omega = \int \rho\frac{v^2}{2}v\,\mathrm{d}\Omega$$

ou encore, si le fluide est incompressible :

$$\bar{v}_c^3 = \frac{1}{\Omega}\int v^3\,\mathrm{d}\Omega \qquad (40)$$

En appliquant cette définition au cas de l'écoulement de Poiseuille, on peut écrire :

$$\bar{v}_c^3 = \frac{1}{\Omega}\int v^3\, 2\pi r\, \mathrm{d}r \qquad (41)$$

$$\bar{v}_c = \frac{\varpi\, j\, R^2}{4\sqrt[3]{4}\mu}$$

soit :

$$\bar{v}_c = \frac{2}{\sqrt[3]{4}}\,\bar{v}_d = \frac{v_\mathrm{max}}{\sqrt[3]{4}}$$

3.1.5 Puissance cinétique de l'écoulement

Exprimons le flux d'énergie cinétique qui traverse une section droite Ω dans l'unité de temps, c'est-à-dire la puissance cinétique de l'écoulement $\dot{W}_c$:

$$\dot{W}_c = \int_0^R \rho v\,\frac{v^2}{2} 2\pi\, r\,\mathrm{d}r = \pi\rho\int_0^R v^3 r\,\mathrm{d}r$$

En tenant compte de (32), on obtient :

$$\dot{W}_c = \frac{\pi\rho\,\varpi^3\, j^3 R^8}{512\,\mu^3} \qquad (42)$$

Comparons cette puissance à celle de l'écoulement du fluide parfait donnant le même débit, c'est-à-dire d'un écoulement à une vitesse $\bar{v}_d$ = constante. Pour cet écoulement, on a :

$$\dot{W}_c' = \rho\frac{\bar{v}_d^2}{2}\dot{V} = \rho\,\frac{\pi\,\varpi^3 j^3 R^8}{1\,024\,\mu^3} \qquad (43)$$

On voit que, compte tenu de l'expression (42) :

$$\dot{W}_c' = \frac{1}{2}\,\dot{W}_c$$

Ainsi, la puissance cinétique d'un fluide réel en écoulement laminaire dans une conduite cylindrique est égale au double de la puissance cinétique d'un fluide parfait dont l'écoulement dans la même conduite donnerait le même débit.

3.2 Écoulement de Hagen-Poiseuille

L'écoulement de Hagen-Poiseuille correspond à **l'écoulement bidimensionnel laminaire d'un fluide newtonien, pesant, incompressible entre deux plans parallèles** (figure **10**). L'écoulement se reproduit identique à lui-même dans la direction $\boldsymbol{x_3}$ et le vecteur vitesse étant parallèle aux plans : $\boldsymbol{v_2} = 0$. Ainsi :

$$\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{x_1} = f(x_1, x_2) \qquad (44)$$

Avec ces restrictions, l'équation du bilan de la masse devient :

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} = 0$$

ce qui permet d'écrire :

$$\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{x}_1 = f(x_2) \qquad (45)$$

L'équation de Navier-Stokes :

$$\rho\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -\,\mathbf{grad}\,P^* + \mu\nabla^2\boldsymbol{v}$$

se décompose alors, suivant les directions $\boldsymbol{x_1}$ et $\boldsymbol{x_2}$, selon les équations suivantes :

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial P^*}{\partial x_1} &= \mu\,\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2}\\ \frac{\partial P^*}{\partial x_2} &= 0\end{aligned}\right\} \qquad (46)$$

La seconde équation du système (46) permet de retrouver le résultat selon lequel les lignes de courant étant rectilignes, la répartition des pressions est hydrostatique et que :

$$P^* = f(x_1) \qquad (47)$$

soit

$$\frac{\partial P^*}{\partial x_1} = f'(x_1)$$

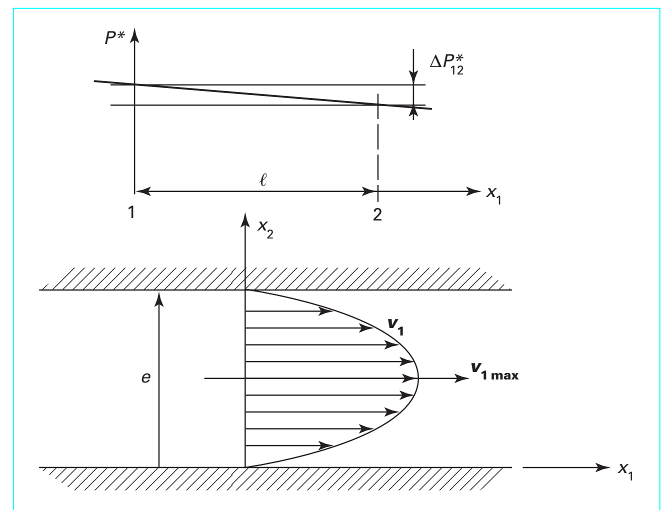


Figure 10 – Écoulement laminaire entre deux plans parallèles

Toute reproduction sans autorisation du Centre français d'exploitation du droit de copie est strictement interdite.
© Techniques de l'Ingénieur, traité Génie énergétique

Ce résultat, couplé à l'équation (45) et à la première équation du système (46), permet d'écrire :

$$P^* = Ax_1 + B \quad \textbf{(48)}$$

$$v_1 = \frac{A}{2\mu}x_2^2 + Cx_2 + D \quad \textbf{(49)}$$

Les constantes A, B, C et D sont à déterminer à partir des conditions aux limites. On considère alors deux cas.

3.2.1 Plans immobiles

Les deux plans étant distants de e, on doit avoir : $(v_1)_0 = 0$ et $(v_1)_e = 0$, soit : $D = 0$ et $C = -Ae/2\mu$. Par ailleurs, $A = \Delta P_{12}^*/\ell$, où ℓ est la distance entre deux sections 1 et 2 (respectivement amont et aval). La variation de la vitesse est parabolique dans une section droite avec une valeur maximum au milieu de la distance séparant les deux plans :

$$v_{1\,\max} = -\frac{1}{8\mu}\frac{\Delta P_{12}^*}{\ell}e_2^2$$

Le débit par unité de longueur selon $\boldsymbol{x_3}$ est lié à la chute de pression par la relation :

$$\dot{V}_\ell = \int_0^e v_1\,\mathrm{d}x_2$$

soit :

$$\frac{\Delta P_{12}^*}{\ell} = -\frac{12\mu}{e^3}\dot{V}_\ell$$

3.2.2 Écoulement plan de Couette

Un plan est mobile, l'autre immobile : supposons que le plan supérieur se déplace avec la vitesse V_e. Avec ces conditions aux limites, on obtient les résultats suivants :

$$P^* = \frac{\Delta P_{12}^*}{\ell}x_1 + B$$

$$v_1 = \frac{\Delta P_{12}^*}{2\mu\ell}x_2^2 + \left(\frac{V_e}{e} - \frac{\Delta P_{12}^* e}{2\mu\ell}\right)x_2$$

Le profil des vitesses est toujours parabolique, mais le maximum est déplacé, soit au-dessus, (figure **11*a***) soit en dessous (figure **11*b***) du milieu de la distance entre les deux plans, selon que V_e est positif ou négatif. La vitesse maximale a pour expression :

$$v_{1\,\max} = \frac{V_e}{2} - \frac{\Delta P_{12}^*}{8\mu\ell}e^2 - \frac{\mu\ell V_e^2}{2e^2\Delta P_{12}^*}$$

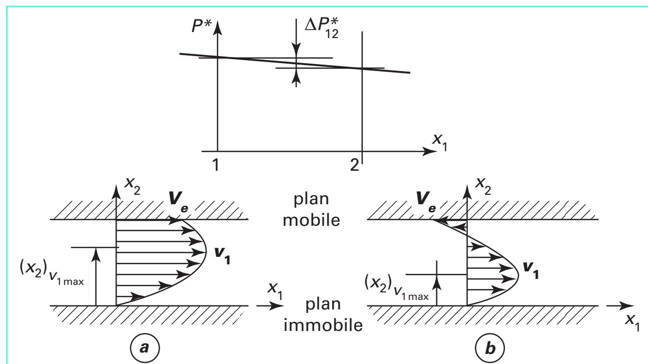


Figure 11 – Écoulement plan de Couette

Le lieu du maximum est donné par :

$$(x_2)_{v_{1\,\max}} = \frac{e}{2} - \frac{\mu\ell V_e}{e\Delta P_{12}^*}$$

3.3 Écoulement laminaire en couche limite

Considérons un **fluide newtonien**, **pesant**, **incompressible**, s'écoulant en **régime permanent** sur une **plaque plane semi-infinie** et de manière **bidimensionnelle** et **isotherme** et intéressons-nous à la partie de l'écoulement constituant la **couche limite**. Faisons l'hypothèse supplémentaire que dans l'écoulement potentiel, la vitesse V est constante.

Le système d'équations (17), avec quelques simplifications dues aux hypothèses précédentes, est applicable à cet écoulement. On a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} &= 0 \\ v_1\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2\frac{\partial v_1}{\partial x_2} &= \nu\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} \end{aligned} \quad \textbf{(50)}$$

Ce système d'équations aux dérivées partielles n'est pas intégrable analytiquement. Seule une résolution numérique permet d'aboutir au résultat, ou des méthodes analytiques basées sur des hypothèses. Parmi ces méthodes, nous développons, à titre d'exemple, celle qui a été proposée par Blasius (1908).

La méthode de Blasius est basée sur l'hypothèse de **l'affinité des profils de vitesse**. Cette hypothèse, valable expérimentalement tant que l'écoulement dans la **couche limite reste laminaire** ($Re_x < Re_t = 3 \times 10^5$; cf. § 2.3) signifie que les profils de la composante v_1 de la vitesse (figure **12**) dans toutes les sections perpendiculaires à la direction $\boldsymbol{x_1}$ sont semblables. Ils ne diffèrent que par un facteur d'échelle fonction de la distance $\boldsymbol{x_1}$ au bord d'attaque de la plaque.

On cherche donc des solutions pour lesquelles, quel que soit x_1, on ait :

$$\frac{v_1}{V} = f\left(\frac{x_2}{\delta'}\right) \quad \textbf{(51)}$$

Comme l'affinité joue dans le sens de $\boldsymbol{x_2}$, c'est-à-dire dans le sens de l'épaisseur de la couche limite, la valeur de δ' doit varier comme l'épaisseur de la couche limite. Or, l'analyse de l'allure de la couche limite (§ 2.6) a montré que la couche limite varie, selon $\boldsymbol{x_1}$ comme $\sqrt{\nu\,\ell/V}$ (équation (19)). Ainsi, on prend :

$$\delta' = \sqrt{\frac{\nu x_1}{V}} \quad \textbf{(52)}$$

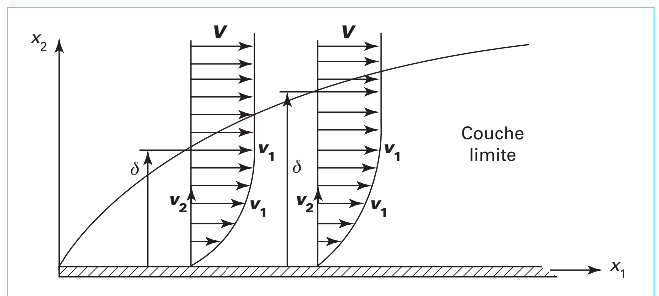


Figure 12 – Évolution semblable des profils de la vitesse pariétale selon la distance au bord d'attaque

Toute reproduction sans autorisation du Centre français d'exploitation du droit de copie est strictement interdite.
©Techniques de l'Ingénieur, traité Génie énergétique

Pour simplifier l'écriture, on pose :

$$\eta = \frac{x_2}{\delta'} = x_2\sqrt{\frac{V}{\nu x_1}}$$

soit

$$\frac{v_1}{V} = f(\eta) \qquad \textbf{(53)}$$

La résolution du système (50) passe alors par l'emploi de la fonction de courant ([BE 8 151], § 5.5) ψ, qui est telle que :

$$v_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \quad ; \quad v_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \qquad \textbf{(54)}$$

Cette définition vérifiant automatiquement la première des équations aux dérivées partielles du système (50), il ne reste plus qu'à résoudre la deuxième équation de ce système.

Notons que, en combinant les équations (52), (53) et (54), la dérivée de ψ par rapport à η est donnée par :

$$\frac{\partial \psi}{\partial \eta} = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial \eta} = v_1\delta' = V\delta' \ f(\eta) = \sqrt{V\nu \ x_1} \ f(\eta) \qquad \textbf{(55)}$$

Sachant que ψ, comme v_1, doit respecter la condition d'affinité, l'intégration de (55) donne :

$$\psi = \sqrt{V\nu \ x_1} \ F(\eta) \qquad \textbf{(56)}$$

où $F(\eta)$ est la primitive de $f(\eta)$ soit également :

$$f(\eta) = F'(\eta) = \frac{v_1}{V} \qquad \textbf{(57)}$$

$F'(\eta)$ étant la dérivée par rapport à η de $F(\eta)$.

Les composantes de la vitesse sont donc :

$$v_1 = VF'(\eta)$$

$$v_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1} = -\frac{\partial(\sqrt{V\nu x_1} \ F(\eta))}{\partial x_1} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu V}{x_1}}(\eta F' - F) \qquad \textbf{(58)}$$

En portant ces expressions des composantes de la vitesse et celles de leurs dérivées par rapport à x_1 et par rapport à x_2 dans la deuxième équation du système (50), on obtient l'équation suivante :

$$FF'' + 2F''' = 0 \qquad \textbf{(59)}$$

On note que l'ensemble de ces transformations a permis de remplacer un système d'équations aux dérivées partielles (50) par une équation différentielle non linéaire du troisième ordre. Cette équation peut, à son tour, être résolue par méthode numérique. Blasius en a donné une autre résolution, en développant la fonction F en série. On pose, a priori :

$$F(\eta) = a_0 + a_1\eta + \frac{a_2}{2!}\ \eta^2 + \frac{a_3}{3!}\ \eta^3 + \dots \qquad \textbf{(60)}$$

Les conditions aux limites étant :

$$\text{à } \eta = 0 \ : \ F' = 0 \text{ et } F = 0$$
$$\text{à } \eta = \infty \ : \ F' = 1$$

Les conditions à $\eta = 0$ imposent d'avoir $a_0 = 0$ et $a_1 = 0$ et, pour respecter {59}, l'équation (60) peut être remplacée par :

$$F(\eta) = \frac{a}{2}\eta^2 - \frac{a^2}{5!}\ \eta^5 + 11\frac{a^3}{8!}\eta^8 - 375\ \frac{a^4}{11!}\eta^{11} + 27\ 897\ \frac{a^5}{14!}\eta^{14} + \dots \qquad \textbf{(61)}$$

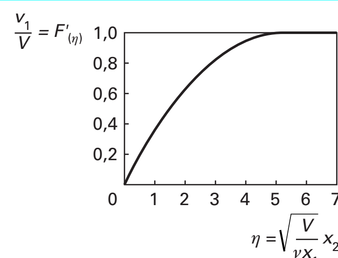
avec $a = 0{,}332$, pour que la condition à l'infini soit respectée.

La fonction F étant déterminée, on en déduit les évolutions des composantes de la vitesse à partir des équations (58) et des valeurs de F et F' qui ont été tabulées dans le tableau **1**. Ces évolutions sont représentées sur la figure **13**. On remarque, notamment, que la présence de la couche limite induit une composante normale de la vitesse qui augmente avec x_2 et qui reste sensiblement constante et non nulle en dehors de la couche limite.

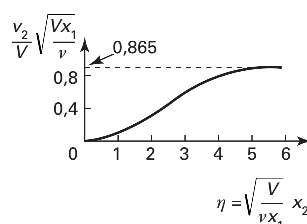
La connaissance de la fonction F, donc de sa dérivée F' par rapport à η permet aussi de calculer l'épaisseur de la couche limite

Tableau 1 – Évolution de la fonction de Blasius F et de ses dérivées selon la normale à la paroi η

η	F	F'	F''
0	0	0	0,332 06
0,2	0,006 64	0,066 41	0,331 99
0,4	0,026 56	0,132 77	0,331 47
0,6	0,059 74	0,198 94	0,330 08
0,8	0,106 11	0,264 71	0,327 39
1,0	0,165 57	0,329 79	0,323 01
1,4	0,322 98	0,456 27	0,307 87
1,8	0,529 52	0,574 77	0,282 93
2,2	0,781 20	0,681 32	0,248 35
2,6	1,072 52	0,772 46	0,206 46
3,0	1,396 82	0,846 05	0,161 36
4,0	2,305 76	0,955 52	0,064 24
5,0	3,283 29	0,991 55	0,015 91
6,0	4,279 64	0,998 98	0,002 40
7,0	5,279 26	0,999 92	0,000 22



ⓐ composante tangentielle



ⓑ composante normale

Figure 13 – Évolution, selon la direction normale, des profils des composantes de la vitesse dans une couche limite laminaire

Toute reproduction sans autorisation du Centre français d'exploitation du droit de copie est strictement interdite.
©Techniques de l'Ingénieur, traité Génie énergétique

cinématique δ, telle qu'à $x_2 = \delta$, $v_1 = 0{,}99\,V$, soit : $F' = 0{,}99$. Cette valeur de F' est obtenue pour :

$$\eta_\delta = \frac{\delta}{\delta'} = 4{,}97 \text{ soit } \delta = 4{,}97\sqrt{\frac{\nu}{V}}\sqrt{x_1} = 4{,}97\frac{x_1}{\sqrt{Re_x}} \quad \textbf{(62)}$$

On retrouve, dans cette relation, la conclusion de l'étude de l'allure parabolique de la couche limite (§ 2.6), avec la valeur du facteur de proportionnalité, 4,97, que l'on assimile, en pratique, à 5.

4. Écoulements turbulents

4.1 Définitions. Généralités

La **turbulence**, dans un écoulement, revêt un caractère essentiellement **aléatoire** toujours **tridimensionnel**. Elle se développe aux **nombres de Reynolds** relativement élevés et est une **propriété de l'écoulement** et non pas du fluide comme l'est la viscosité par exemple. On constate que la turbulence augmente la capacité de **transport** à l'intérieur du fluide par augmentation des termes de diffusion (diffusion de quantité de mouvement, diffusion de chaleur, etc.) et augmente également la **dissipation** d'énergie mécanique en énergie thermique.

Ainsi, et comme cela a aussi été indiqué au début de cet article, un écoulement turbulent est un **écoulement instationnaire** dans lequel, selon la théorie de Reynolds encore appelée **théorie statistique**, on peut mettre en évidence des **valeurs moyennes** des paramètres auxquelles se superposent des **fluctuations**. L'**échelle des fluctuations** étant grande par rapport au libre parcours moyen des molécules, l'hypothèse locale d'homogénéité est encore vérifiée et on peut appliquer, aux paramètres instantanés, les **équations fondamentales**, du type Navier-Stokes, de la mécanique des fluides. Le traitement de ces équations peut être de deux natures différentes.

4.1.1 Traitement direct ou simulation

Dans ce cas, les grandeurs utilisées dans les équations de bilans sont les grandeurs instantanées et la résolution est numérique. On a affaire à de la **simulation numérique directe** (SND). Mais, compte tenu, d'une part de la non-linéarité des équations de la quantité de mouvement notamment, d'autre part, de l'échelle de turbulence qui est très faible, il est **impossible** dans l'état actuel des moyens de calcul de connaître rigoureusement le mouvement du fluide sur des grandes distances ou sur un temps très long à partir de conditions aux limites et initiales données. Par ailleurs, toute perturbation, même faible, a de ce fait, des conséquences importantes qui rendent imprévisible le mouvement à long terme et sur de longues distances (impossibilité de prévoir le temps qu'il fera à long terme, en météorologie). De même une méconnaissance des conditions initiales et aux limites exactes engendre rapidement des écarts importants entre le calcul et l'expérience. Ainsi, si les équations, qui malgré le chaos qu'elles engendrent, rendent le problème « déterministe », la solution réelle est en fait « imprévisible » dans les problèmes de « taille » spatiale et temporelle industrielle. Afin de pallier le problème lié à la taille du calcul, une méthode intermédiaire entre la simulation numérique directe (SND) et le traitement statistique est en cours de développement. Il s'agit de la **simulation aux grandes échelles** (SGE), qui prend en compte les perturbations de grande taille, mais modélise l'effet des petites structures (voir Lesieur [5]).

4.1.2 Traitement statistique ou modélisation

Dans ce cas, qui sera étudié plus en détail § 4.3, on utilise la décomposition de Reynolds. Les équations de bilans sont moyennées soit sur le temps pour les problèmes pseudo-permanents, soit sur un grand nombre de configurations et seules les valeurs moyennes sont explicitées. Mais comme dans de nombreux cas on ne s'intéresse qu'à ces moyennes, ce traitement est suffisant pour la plupart des problèmes industriels. Comme on le verra § 4.3.2.2 et § 4.3.2.3, la non-linéarité des équations entraîne, dans ce mode de traitement, l'apparition d'inconnues supplémentaires qui rendent « **ouvert** » le système classique d'équations (nombre d'inconnues supérieur au nombre d'équations). Il convient donc de formuler des équations complémentaires dites **équations de fermeture** afin de résoudre le problème. C'est cette formulation qui correspond à une phase de modélisation.

4.2 Échelles de turbulence

Les différents transferts qui ont lieu dans un écoulement turbulent sont soumis aux lois des diverses **échelles caractéristiques** de l'écoulement. Notons par :

— U et L les grandeurs caractéristiques de la vitesse et de la longueur de l'écoulement moyen. $T = L / U$ est alors l'échelle caractéristique du temps pour cet écoulement ;

— u et ℓ les échelles caractéristiques des vitesses de fluctuations turbulentes et de la longueur des fluctuations locales. $\tau = \ell / u$ est alors le temps caractéristique de la turbulence qui sera dite turbulence à grande échelle ou **macroéchelle**.

Selon la théorie de Kolmogorov (1941), la turbulence procède d'un **transfert d'énergie cinétique** en cascade de l'écoulement moyen à des cellules de turbulence à grande échelle qui transfèrent de l'énergie cinétique à des cellules turbulentes à plus petite échelle, etc., jusqu'à atteindre une échelle où les **contraintes visqueuses** agiront fortement pour **dissiper** en chaleur l'énergie cinétique ainsi transmise. Cette échelle, la plus petite à considérer en matière de turbulence, est la **microéchelle** ou **échelle de Kolmogorov** ; la cascade décrite ci-dessus est la **cascade de Kolmogorov** (figure **14**).

Pour que les divers transferts énergétiques aient lieu efficacement, il est évident que les temps caractéristiques de l'écoulement moyen et des fluctuations doivent être du même ordre de grandeur. Ainsi :

$$T = \frac{L}{U} \approx \tau = \frac{\ell}{u}$$

Par ailleurs, la microéchelle ℓ_k qui correspond aux tourbillons les plus petits doit être de l'ordre de grandeur de l'épaisseur de la couche visqueuse qui annulerait u_k dans le laps de temps τ_k (figure **15**). La relation entre ces grandeurs s'obtient par une analyse d'échelle, en considérant les deux termes suivants de l'équation de Navier-Stokes (terme de force d'inertie et terme de force de viscosité – qui doivent être du même ordre de grandeur à cette échelle) :

$$\frac{\partial v}{\partial t} \quad ; \quad \nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

soit :

$$\frac{u_k}{\tau_k} \approx \nu\frac{u_k}{\ell_k^2} \Rightarrow \ell_k \approx \sqrt{\nu\tau_k} \quad \textbf{(63)}$$

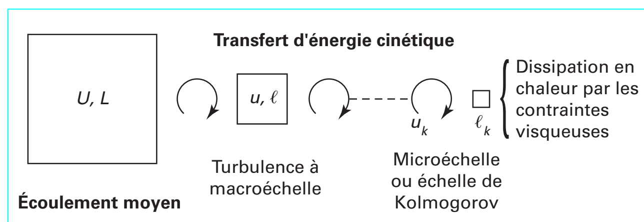


Figure 14 – Cascade de Kolmogorov

Toute reproduction sans autorisation du Centre français d'exploitation du droit de copie est strictement interdite.
©Techniques de l'Ingénieur, traité Génie énergétique

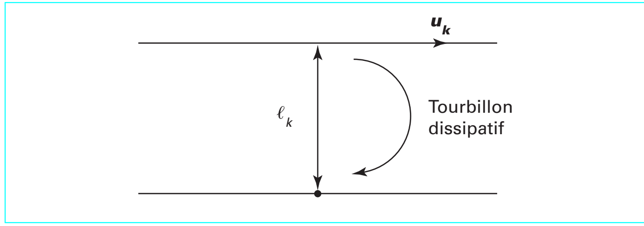


Figure 15 – Schématisation de la microéchelle

Le résultat précédent peut être traduit en valeur du nombre de Reynolds relatif à cette échelle. Si on note par :

$$Re_k = \frac{\ell_k u_k}{\nu}$$

comme :

$$\tau_k \approx \frac{\ell_k^2}{\nu} \text{ et que : } \tau_k = \frac{\ell_k}{u_k}$$

on trouve :

$$\ell_k \approx \frac{\nu}{u_k}$$

soit :

$$Re_k \approx 1$$

Pour l'ensemble de la cascade, jusqu'à l'échelle de Kolmogorov, la puissance cinétique $\dot{\varepsilon}$ est transférée intégralement. On peut ainsi écrire :

$$\dot{\varepsilon} \approx \frac{u^2}{\tau} = \frac{u^3}{\ell} \approx \ldots \approx \frac{u_k^3}{\ell_k} \quad (64)$$

(on ne peut pas prendre en compte, ici, le mouvement moyen car on ne connaît pas a priori la part d'énergie cinétique transférée). A l'échelle de Kolmogorov, cette puissance cinétique correspond à une puissance de dissipation visqueuse ([BE 8 153], § 4.1) dont l'ordre de grandeur est aussi fourni par une analyse d'échelle :

$$\nu \sum_{ij} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \approx \nu \frac{u_k^2}{\ell_k^2}$$

Ainsi :

$$\frac{u_k^3}{\ell_k} \approx \nu \frac{u_k^2}{\ell_k^2} \Rightarrow \frac{\nu}{\ell_k u_k} \approx 1 \quad (65)$$

On retrouve alors :

$$Re_k \approx 1$$

En portant cette valeur dans l'expression de la puissance transférée $\dot{\varepsilon}$, on obtient :

$$\dot{\varepsilon} \approx \frac{\nu^3}{\ell_k^4}$$

ce qui donne :

$$\ell_k \approx \frac{\nu^{3/4}}{\dot{\varepsilon}^{1/4}} \qquad \text{et} \qquad u_k \approx (\dot{\varepsilon}\nu)^{1/4}$$

Ainsi, l'expression de ℓ_k, avec les diverses valeurs de $\dot{\varepsilon}$, peut encore s'écrire :

$$\ell_k \approx \frac{\nu^{3/4}}{u^{3/4}/\ell^{1/4}} = \ell\left(\frac{\nu}{u\ell}\right)^{3/4} \Rightarrow \ell_k \approx \ell\, Re_\ell^{\ -3/4} \quad (66)$$

alors que pour u_k, on obtient :

$$u_k \approx \frac{u^{3/4}}{\ell^{1/4}} \nu^{1/4} = \left(\frac{u\ell}{\nu}\right)^{3/4} \frac{\nu}{\ell} \Rightarrow u_k \approx \frac{\nu}{\ell} Re_\ell^{3/4} \quad (67)$$

On en déduit la relation entre l'échelle de temps de dissipation τ_k et l'échelle de temps des fluctuations turbulentes τ :

$$\tau_k = \frac{\ell^2 Re_\ell^{-3/2}}{\nu} = \tau\, Re_\ell^{-1/2} \quad (68)$$

où $Re_\ell = \frac{u\ell}{\nu}$ est le nombre de Reynolds des fluctuations ou de la macroéchelle.

Si on note que ce nombre de Reynolds est relié au nombre de Reynolds de l'écoulement $Re_L = UL/\nu$ par la relation suivante, déduite de l'identité des échelles de temps :

$$Re_\ell = \left(\frac{\ell}{L}\right) Re_L \quad (69)$$

l'échelle du temps de dissipation, différente des autres échelles de temps, est donnée par :

$$\tau_k = \frac{L}{\ell} \frac{\tau}{\sqrt{Re_L}} \quad (70)$$

Exemple : pour de l'eau ($\nu = 10^{-6}$ m²/s) qui s'écoule à 10 m/s dans une canalisation de 10 cm de diamètre avec des fluctuations de vitesse de l'ordre de 20 %, on a :

$$\frac{\ell}{L} \approx \frac{u}{U} = 0,2 \ ; \ Re_L = 10^6 \ ; \ \tau \approx 10^{-2} \text{ s} \ ; \ Re_\ell = 4 \times 10^4$$

soit :

$$\tau_k \approx 5 \times 10^{-5} \text{ s} \ ; \ \ell_k \approx 7 \times 10^{-6} \text{ m et } u_k \approx 0,1 \text{ m/s.}$$

Ce résultat montre à quel point le maillage de résolution numérique d'un tel problème devrait être serré pour pouvoir prendre en compte la physique à l'ordre de la microéchelle (10^{-5} m environ dans l'exemple choisi) et calculer la vitesse réelle en tout point de l'écoulement.

4.3 Traitement statistique de la turbulence. Équations de Reynolds

4.3.1 Grandeurs moyennes

Dans le traitement statistique de la turbulence, toute grandeur g est écrite sous la forme dite de la **décomposition de Reynolds** :

$$g = g_m + g' \quad (71)$$

Toute reproduction sans autorisation du Centre français d'exploitation du droit de copie est strictement interdite.
©Techniques de l'Ingénieur, traité Génie énergétique

où g_m est la grandeur moyenne et g' le terme de fluctuation. Deux types de moyennes sont utilisés :

— la moyenne statistique ou stochastique ;
— la moyenne temporelle.

La **moyenne temporelle**, notée $\bar{g}$, ne peut être utilisée que dans le cas des **écoulements permanents en moyenne** encore appelés **pseudo-permanents**. Elle est définie par la relation (figure **16**) :

$$\bar{g} = \lim_{T \to \infty} \left[\frac{1}{T} \int_t^{t+T} g(t)\, \mathrm{d}t \right] \tag{72}$$

La **moyenne stochastique**, notée $< g >$, doit obligatoirement être utilisée si le mouvement n'est pas permanent en moyenne. Elle est définie par la relation (figure **17**) :

$$< g > = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} g_i \right) \tag{73}$$

où g_i est la mesure au même temps t du phénomène lors de l'expérience n° i.

Dans le cas de l'écoulement de fluides compressibles, on utilise souvent la notion de **moyenne pondérée par la masse** notée $\tilde{g}$ ou **moyenne de Favre**. On a, par définition :

$$g = \tilde{g} + g'$$

avec :

$$\tilde{g} = \frac{< \rho g >}{< \rho >}$$

ρ étant tel que :

$$\rho = < \rho > + \rho'$$

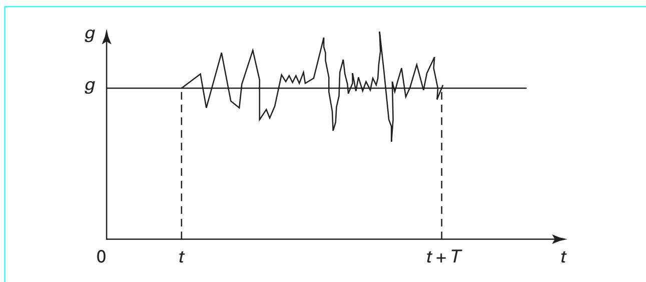


Figure 16 – Évolution temporelle de la grandeur *g* dans un écoulement pseudo-permanent

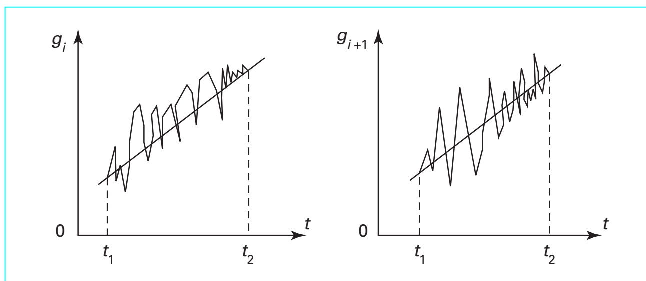


Figure 17 – Évolutions temporelles de la grandeur *g* au cours d'expériences successives

Notons que les conséquences de ces définitions sont les suivantes :

$$< g' > = 0$$

$$< g_1 + g_2 > = < g_1 > + < g_2 >$$

$$< g_1\, g_2 > = g_1 < g_2 > \text{ si } g_1 \text{ n'est pas aléatoire}$$

$$<< g_1 > g_2 > = < g_1 > < g_2 >$$

$$< \frac{\partial g}{\partial t} > = \frac{\partial < g >}{\partial t} \tag{74}$$

$$< \frac{\partial g}{\partial x_i} > = \frac{\partial < g >}{\partial x_i}$$

$$< \int g\, \mathrm{d}x_i\, \mathrm{d}t > = \int < g >\, \mathrm{d}x_i\, \mathrm{d}t$$

$$<< g_1 > g_2' > = 0$$

Mis à part les termes comportant explicitement le temps, ces relations, construites avec la moyenne stochastique, sont valables avec la moyenne temporelle.

4.3.2 Équations de Reynolds

Dans la suite de cette présentation, nous faisons l'hypothèse d'un fluide **newtonien**, **pesant**.

4.3.2.1 Équations de la conservation de la masse

Avec les hypothèses précédentes, l'équation de continuité s'écrit, en variables instantanées :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \boldsymbol{v} = 0$$

ou encore, en admettant que les **fluctuations sur la masse volumique** ρ **sont négligeables** et avec :

$$\boldsymbol{v} = < \boldsymbol{v} > + \boldsymbol{v}'$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho < \boldsymbol{v} > + \operatorname{div} \rho \boldsymbol{v}' = 0$$

En faisant la moyenne statistique de cette relation, compte tenu de la relation :

$$< \frac{\partial g'}{\partial x_i} > = \frac{\partial}{\partial x_i} < g' > = 0$$

on a :

$$< \operatorname{div} \rho \boldsymbol{v}' > = 0$$

On en déduit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho < \boldsymbol{v} > = 0 \tag{75}$$

Pour alléger l'écriture, on notera par la suite $< g > \equiv G$. Soit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \boldsymbol{V} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho V_i}{\partial x_i} = 0 \tag{76}$$

L'équation de continuité a donc une forme analogue en grandeurs instantanées et en valeurs moyennes, la vitesse instantanée étant simplement remplacée par la vitesse moyenne.

Toute reproduction sans autorisation du Centre français d'exploitation du droit de copie est strictement interdite.
©Techniques de l'Ingénieur, traité Génie énergétique

4.3.2.2 Bilan de la quantité de mouvement. Équation de Navier-Stokes

L'équation de Navier en grandeurs instantanées s'écrit pour un fluide pesant et en prenant en compte l'équation de conservation de la masse :

$$\rho\gamma_i = \frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_j v_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \rho g_i + \frac{\partial T'_{ij}}{\partial x_j} \quad \textbf{(77)}$$

où T'_{ij} est une composante de la contrainte visqueuse et g_i la composante de la gravitation. Pour un fluide newtonien et avec l'**hypothèse de Stokes**, dans laquelle le second coefficient de viscosité, ou viscosité de dilatation, vaut $\eta = -2\mu/3$, la contrainte visqueuse s'écrit ([BE 8 153], § 3.1.2) :

$$T'_{ij} = \mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \boldsymbol{v}\, \delta_{ij}$$

L'équation de Navier-Stokes s'écrit alors :

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_j v_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \rho g_i + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \boldsymbol{v}\, \delta_{ij}\right) \quad \textbf{(78)}$$

Dans le membre de droite de cette équation, on peut regrouper les deux derniers termes. On obtient alors :

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_j v_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \rho g_i + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{3}\mu \operatorname{div} \boldsymbol{v}\right) \quad \textbf{(79)}$$

Dans l'équation (77), on peut remplacer les valeurs instantanées par leur formulation de Reynolds, en considérant que la fluctuation de la masse volumique est négligeable. Ainsi :

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(<v_i> + v'_i) + \frac{\partial \rho(<v_j> + v'_j)(<v_i> + v'_i)}{\partial x_j} = -\frac{\partial <P> + P'}{\partial x_i} + \rho g_i + \frac{\partial <T'_{ij}> + T'_{ij}}{\partial x_j}$$

On effectue alors la moyenne stochastique de cette relation prenant en compte les relations (74) :

$$\frac{\partial \rho V_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho(V_j V_i + <v'_j v'_i>)}{\partial x_j} = -\frac{\partial <P>}{\partial x_i} + \rho g_i + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \boldsymbol{V}\, \delta_{ij}\right)$$

ou encore :

$$\frac{\partial \rho V_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho V_j V_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial <P>}{\partial x_i} + \rho g_i + \frac{\partial}{\partial x_j}\Bigg[\underbrace{\mu\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \boldsymbol{V}\, \delta_{ij}}_{\text{I}} \underbrace{-\rho <v'_j v'_i>}_{\text{II}}\Bigg] \quad \textbf{(80)}$$

Dans le troisième terme du membre de droite de cette équation, appelée **équation de Reynolds** :

— le terme I est dû aux tensions visqueuses traduisant la **diffusion moléculaire** de la quantité de mouvement, μ étant la viscosité dynamique moléculaire du fluide ;

— le terme II correspond à l'influence de la turbulence sur le mouvement moyen. Il est appelé **tenseur des tensions turbulentes apparentes** ou encore **tenseur de Reynolds**. C'est un tenseur symétrique, inconnu a priori, ce qui rend **ouvert** le système des équations du mouvement moyen. On peut remarquer que ces **tensions de Reynolds** sont dues à la **non-linéarité** des équations de Navier-Stokes. Leur présence nécessite de trouver des équations supplémentaires dites de **fermeture** basées sur des **hypothèses** ou **modèles de fermeture**.

L'une des méthodes de résolution statistique des équations de Navier-Stokes en écoulement turbulent consiste à adopter l'hypothèse faite par **Boussinesq** (1877). Dans cette méthode, on fait une analogie entre les termes I et II de l'équation (80). Ainsi, les tensions ou contraintes de Reynolds sont assimilées à des tensions visqueuses dues à la turbulence appelées : **contraintes de viscosité turbulente**. On les pose égales à :

$$T^t_{ij} = -\rho <v'_j v'_i> = \mu_t\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\mu_t \operatorname{div} \boldsymbol{V}\, \delta_{ij} - \frac{2}{3}\rho k \delta_{ij} \quad \textbf{(81)}$$

où μ_t est appelée **viscosité turbulente**. Contrairement à la viscosité moléculaire, cette viscosité n'est pas un paramètre intrinsèque au fluide, mais dépend essentiellement (selon la relation (81)) de l'écoulement et de son niveau de turbulence. Dans cette expression, le paramètre k, qui représente l'**énergie cinétique turbulente**, permet d'éviter d'avoir une influence nulle de la turbulence en dehors des couches limites, où les gradients de vitesses moyennes sont nuls. Son expression est donnée par :

$$k = \frac{<v_i'^2>}{2} \quad \textbf{(82)}$$

Les équations moyennées du bilan de la quantité de mouvement s'écrivent alors :

$$\frac{\partial \rho V_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho V_j V_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial <P>}{\partial x_i} + \rho g_i + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[(\mu + \mu_t)\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}(\mu + \mu_t) \operatorname{div} \boldsymbol{V}\, \delta_{ij} - \frac{2}{3}\rho k \delta_{ij}\right]$$

soit :

$$\frac{\partial \rho V_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho V_j V_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial <P>}{\partial x_i} + \rho g_i + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[(\mu + \mu_t)\frac{\partial V_i}{\partial x_j}\right] + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{3}(\mu + \mu_t) \operatorname{div} \boldsymbol{V} - \frac{2}{3}\rho k\right) \quad \textbf{(83)}$$

Dans ces équations, μ_t et k apparaissent comme de nouvelles variables qu'il convient de déterminer à partir d'équations complémentaires de fermeture.

4.3.2.3 Bilan de l'énergie

Un développement analogue peut être fait à partir de l'équation de l'énergie ([BE 8 153], § 5.4, équation (97)) :

$$\frac{\partial \rho h}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_j h}{\partial x_j} = \frac{\partial P}{\partial t} + v_j \frac{\partial P}{\partial x_j} + \Phi + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j}\right) \quad \textbf{(84)}$$

où Φ est la fonction dissipation, définie par la relation :

$$\Phi = \eta\, (\operatorname{div} \boldsymbol{v})^2 + \mu \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \quad \textbf{(85)}$$

La conductivité thermique λ peut être reliée à la diffusivité thermique a ($a = \lambda/\rho c_p$) et au nombre de Prandtl ($Pr = \nu/a$) par la relation : $\lambda = (\mu c_p)/Pr$. En utilisant cette expression de λ, et en admettant, d'une part, que l'enthalpie h du fluide est liée à la température par la relation $h = c_p T$ (cas des liquides et des gaz parfaits), d'autre part, que la capacité thermique massique sous pression constante c_p est constante, on obtient :

$$\frac{\partial \rho h}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_j h}{\partial x_j} = \frac{\partial P}{\partial t} + v_j \frac{\partial P}{\partial x_j} + \Phi + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\mu}{Pr}\frac{\partial h}{\partial x_j}\right) \quad \textbf{(86)}$$

En notant par H, $<P>$ et $<\Phi>$ la valeur des moyennes des fonctions h, P et Φ, et par un raisonnement analogue à celui qui a été fait

Toute reproduction sans autorisation du Centre français d'exploitation du droit de copie est strictement interdite.
©Techniques de l'Ingénieur, traité Génie énergétique

pour la quantité de mouvement, la moyenne stochastique de cette équation est :

$$\frac{\partial \rho H}{\partial t} + \frac{\partial \rho (V_j H + < v'_j h' >)}{\partial x_j}$$
$$= \frac{\partial < P >}{\partial t} + V_j \frac{\partial < P >}{\partial x_j} + < v'_j \frac{\partial P'}{\partial x_j} > + < \Phi > + \Phi' + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\mu}{Pr}\frac{\partial H}{\partial x_j}\right)$$

Dans la plupart des problèmes, l'**effet de la pression et celui de la dissipation sont faibles** par rapport aux autres énergies mises en jeu, thermique notamment. On néglige ainsi toutes les moyennes des produits de termes de fluctuation dans les expressions du d'alembertien de la pression et de la fonction de dissipation. Par ailleurs, suivant le même formalisme que pour les contraintes de Reynolds, on pose :

$$- \rho < v'_j h' > = \frac{\mu_t}{Pr_t}\frac{\partial H}{\partial x_j} \quad \textbf{(87)}$$

où Pr_t est un nouveau paramètre appelé : **nombre de Prandtl turbulent**.

L'équation moyennée de l'énergie s'écrit, en définitive :

$$\frac{\partial \rho H}{\partial t} + \frac{\partial \rho V_j H}{\partial x_j} = \frac{\partial < P >}{\partial t} + V_j \frac{\partial < P >}{\partial x_j} + < \Phi > + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\left(\frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t}\right)\frac{\partial H}{\partial x_j}\right) \textbf{(88)}$$

4.3.3 Équations de fermeture

Les équations de bilan précédentes (76), (83) et (88) peuvent être écrites sous la forme générale suivante :

$$\frac{\partial \rho\ \phi}{\partial t} + \frac{\partial \rho V_j \phi}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\right) + S \quad \textbf{(89)}$$

dans laquelle ϕ représente la grandeur massique sur laquelle on effectue le bilan, Γ est le coefficient de diffusion de cette grandeur et S un ensemble de termes complémentaires dits « termes sources » (positifs ou négatifs) relatifs à cette grandeur. Cette équation de bilans est encore dite « **équation de transport** » car elle comporte effectivement deux termes de transport : un **transport convectif** (deuxième terme du membre de gauche) et un **transport diffusif** (premier terme du membre de droite). Pour chacun des bilans considérés, ϕ, Γ et S sont donnés dans le tableau **2**. Il convient cependant de remarquer que, pour garder une forme tout à fait générale, cette équation implique d'affecter au terme « source » une partie des termes diffusifs dans l'équation de la quantité de mouvement.

L'ensemble des équations de bilans représente un système de cinq équations (une pour le bilan de la masse, trois pour le bilan de la quantité de mouvement et une pour l'énergie) à neuf inconnues : ρ, V_i, $< P >$, H, k, μ_t et Pr_t. C'est donc un système ouvert. On peut lui adjoindre : l'**équation d'état du fluide** (par exemple $P/\rho = rT$ pour un gaz parfait).

Cependant, cette équation fait apparaître une dixième inconnue : la température T. On utilise alors, comme **équation complémentaire** : l'équation liant l'enthalpie du fluide à la température, soit, selon l'hypothèse faite précédemment : $h = c_p T$.

Avec ce système de sept équations à dix inconnues, il est possible d'exprimer sept paramètres : ρ, V_i, $< P >$, H et T en fonction des trois derniers : k, μ_t et Pr_t. Compte tenu des problèmes traités, le nombre de Prandtl turbulent est fixé a priori. La valeur adoptée le plus fréquemment est $Pr_t = 1$. Pour les deux derniers paramètres, il faut mettre en place deux **équations de fermeture** qui dépendent du modèle choisi :

— fermetures algébriques ;
— fermetures à schéma énergétique ou à équations de transport.

4.3.3.1 Fermetures algébriques

Ces équations de fermeture donnent **explicitement** la viscosité turbulente en fonction de certains paramètres de l'écoulement. Plusieurs lois de ce type ont été proposées et on peut citer les suivantes.

■ **Approximation de Boussinesq** (1877)

Elle suppose que, quel que soit le fluide, ρ est constant dans l'équation de conservation de la masse et que la **viscosité turbulente** est uniforme dans tout l'écoulement. La valeur de cette constante est à déterminer à partir d'un résultat expérimental, et on néglige le terme en k dans l'expression (83).

Tableau 2 – Expression des grandeurs ϕ, Γ et S de l'équation générale de transport (89)

Équation générale de transport		$\frac{\partial \rho\phi}{\partial t} + \frac{\partial \rho V_j\ \phi}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\right) + S$	
Type de bilan	**Grandeur massique ϕ**	**Coefficient de diffusion Γ**	**Termes source S**
Masse	1	0	0
Espèce n	C_n	$\frac{\mu}{Sc} + \frac{\mu_t}{Sc_t}$	$< S_n >$
Quantité de mouvement	V_i	$\mu + \mu_t$	$\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\Gamma}{3}\ \text{div}\ \boldsymbol{V} - \frac{2}{3}\rho k\right] - \frac{\partial < P >}{\partial x_i} + \rho g_i$
Énergie	H	$\frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t}$	$\frac{\partial < P >}{\partial t} + V_j \frac{\partial < P >}{\partial x_i} + < \Phi >$
Énergie cinétique turbulente	k	$\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k}$	$\mu_t \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial V_i}{\partial x_j} - \rho\ \varepsilon - D$
Dissipation de l'énergie cinétique turbulente	ε	$\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}$	$C_{\varepsilon 1}\ f_1\ \frac{\varepsilon}{k}\ \mu_t \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial V_i}{\partial x_j} - C_{\varepsilon 2}\ f_2\ \rho\ \frac{\varepsilon^2}{k} - E$

Toute reproduction sans autorisation du Centre français d'exploitation du droit de copie est strictement interdite.
©Techniques de l'Ingénieur, traité Génie énergétique

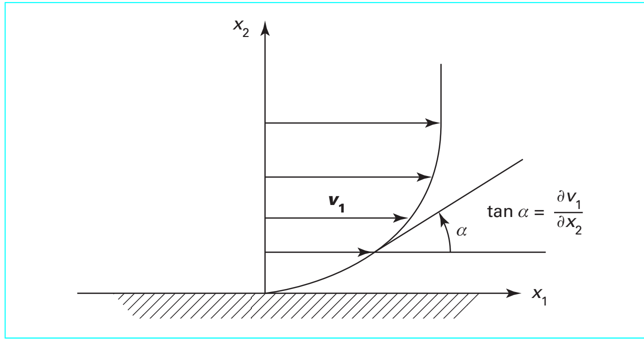


Figure 18 – Écoulement d'un fluide au voisinage d'une paroi

■ **Modèle de Prandtl** ou encore de la **longueur de mélange** (1925)

Dans ce modèle, applicable au voisinage de parois où le gradient transversal de la composante longitudinale de la vitesse est prépondérant, on pose (figure **18**) :

$$\mu_t = \rho\, \ell_m^2 \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \quad \textbf{(90)}$$

L'expression de la **longueur de mélange** ℓ_m est donnée par une loi de paroi. Par exemple, cette loi peut être du type proportionnel :

$\ell_m = Kx_2$, où K est la constante de von Karman égale à 0,41.

Pour exprimer k dans ce modèle, on suppose que la viscosité turbulente μ_t est directement liée à l'énergie cinétique turbulente k et à la longueur de mélange, selon l'expression suivante, déduite de l'analyse dimensionnelle :

$$\mu_t = \rho\, \ell_m \sqrt{k}$$

soit :

$$k = \left(\frac{\mu_t}{\rho \ell_m}\right) \quad \textbf{(91)}$$

■ **Modèle de Prandtl-Reichart** (1942)

C'est un modèle qui donne de bons résultats dans les jets libres et les écoulements atmosphériques et dans lequel on a simplement :

$$\mu_t = \rho\, \ell_m V \quad \textbf{(92)}$$

Comme la précédente, cette équation explicite en μ_t nécessite d'exprimer la longueur de mélange, k se déduisant de la relation (91).

4.3.3.2 Fermetures par équations de transport (ou énergétiques)

Deux grands types de modèles font partie de cette famille : le **modèle *k*,** ℓ et le **modèle *k*,** ε.

4.3.3.2.1 Modèle à une équation de transport ou modèle de Prandtl-Kolmogorov ou modèle k, ℓ

L'hypothèse de base de ce modèle est le lien entre la viscosité turbulente, l'énergie cinétique turbulente et la longueur de mélange ℓ. Elle se traduit par une équation analogue à l'équation (91) :

$$\mu_t = C_{\mu\ell}\, \rho\, \ell \sqrt{k} \quad \textbf{(93)}$$

dans laquelle $C_{\mu\ell}$ est une constante à déterminer. La longueur ℓ caractéristique est donnée par une loi du même type que celle des fermetures algébriques alors que k est définie par une équation de transport obtenue en faisant la différence entre l'équation de l'énergie cinétique totale moyenne et l'équation de l'énergie cinétique du mouvement moyen. L'équation de base obtenue par ce développement a été modifiée de nombreuses fois afin de mieux corréler, grâce à des fonctions de correction, les résultats numériques et expérimentaux. L'une des formulations les plus générales est la suivante (pour plus de précisions, le lecteur pourra se reporter à Schistel [6], Cousteix [7], Padet [2], White [8], notamment) :

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \frac{\partial \rho V_j k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k}{\partial x_j}\right] + \mu_t\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial V_i}{\partial x_j} - \rho\varepsilon - D \quad \textbf{(94)}$$

où ε est appelé **taux de dissipation** de l'énergie cinétique turbulente. Son expression en fonction des fluctuations des vitesses est :

$$\varepsilon = \frac{\mu_t}{\rho} < \frac{\partial v_i'}{\partial x_j}\frac{\partial v_j'}{\partial x_i} > \quad \textbf{(95)}$$

D est un terme complémentaire à ne prendre en compte que dans les zones d'écoulements à bas nombre de Reynolds :

$$D = 2\mu\left(\frac{\partial \sqrt{k}}{\partial x_j}\right)^2 \quad \textbf{(96)}$$

En admettant que $\varepsilon = f(\rho, k, \ell)$, on obtient, par analyse dimensionnelle :

$$\varepsilon = \frac{\text{énergie cinétique turbulente}}{\text{temps caractéristique des fluctuations}} \approx \frac{k}{\ell / k^{1/2}} = \frac{k^{3/2}}{\ell}$$

Ainsi :

$$\varepsilon = C_D \frac{k^{3/2}}{\ell} \quad \textbf{(97)}$$

où C_D est la constante de dissipation à déterminer.

Dans ce modèle, trois constantes : $C_{\mu\ell}$, C_D et σ_k ont été introduites. Elles représentent autant d'inconnues supplémentaires qu'il convient de déterminer expérimentalement. Dans la pratique, on utilise couramment les valeurs suivantes :

$$C_{\mu\ell} = 1,13\ ;\ C_D = 0,08 \text{ et } \sigma_k = 1$$

4.3.3.2.2 Modèle à deux équations de transport ou modèle k, ε

Dans le modèle k, ε, on remplace la longueur caractéristique ℓ et la loi de paroi qui s'ensuit par une équation de transport relative au taux de dissipation ε. La viscosité turbulente est alors exprimée en fonction de k et de ε par élimination de ℓ entre les équations (93) et (97) :

$$\frac{\mu_t}{C_{\mu\ell}\, \rho\, k^{1/2}} = C_D \frac{k^{3/2}}{\varepsilon}$$

soit :

$$\mu_t = C_\mu\, f_\mu\, \rho \frac{k^2}{\varepsilon} \quad \textbf{(98)}$$

Dans cette formulation, le coefficient f_μ n'est à prendre en compte que dans les zones d'écoulements à bas nombre de Reynolds.

L'équation de transport de k est analogue à la précédente (94). L'équation de transport relative à ε, compte tenu des divers correctifs apportés au développement de base, s'écrit :

$$\left(\frac{\partial \rho\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \rho V_j\, \varepsilon}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}\right] + C_{\varepsilon 1}\, f_1\, \frac{\varepsilon}{k}\, \mu_t\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial V_i}{\partial x_j} - C_{\varepsilon 2}\, f_2\, \rho\, \frac{\varepsilon^2}{k} - E \quad \textbf{(99)}$$

Dans cette expression, la fonction E n'est à prendre en compte que dans certains cas d'écoulements à bas nombre de Reynolds. Son expression est alors la suivante :

$$E = 2\mu\nu_t\left(\frac{\partial^2 V_i}{\partial x_j^2} - \frac{\partial^2 V_j}{\partial x_i^2}\right)^2 (1 - \delta_{ij}) \quad \textbf{(100)}$$

Toute reproduction sans autorisation du Centre français d'exploitation du droit de copie est strictement interdite.
© Techniques de l'Ingénieur, traité Génie énergétique

En général, pour des écoulements turbulents libres, à haut nombre de Reynolds, les valeurs des diverses constantes de ce modèle sont :

$$C_{\varepsilon 1} = 1{,}44\ ;\ C_{\varepsilon 2} = 1{,}92\ ;\ C_\mu = 0{,}09\ ;\ \sigma_k = 1\ ;\ \sigma_\varepsilon = 1{,}3$$

$$f_\mu = 1\ ;\ f_1 = 1\ ;\ f_2 = 1\ ;\ D = 0 \text{ et } E = 0$$

Pour illustrer la grande diversité des modèles proposés sur la base du type k, ε, on trouvera, dans le tableau **3**, les valeurs de coefficients donnés par divers auteurs pour des situations d'écoulements variées. Ces résultats, et d'autres, sont rassemblés dans les références [9], [10], [11], [12] et [13] de la bibliographie à laquelle le lecteur peut se rapporter. Pour tous les modèles du tableau **3**, les fonctions E et D ne sont pas considérées et les nombres de Reynolds Re_n et Re_t sont définis par les relations suivantes :

$$Re_n = \frac{x_n \sqrt{k}}{\nu} \quad ; \quad Re_t = \frac{k^2}{\varepsilon \nu} \qquad \textbf{(101)}$$

où x_n est la distance normale à la paroi la plus proche. La distance y^+ est donnée par :

$$y^+ = \frac{x_n v^*}{\nu} \text{ avec } v^* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \qquad \textbf{(102)}$$

avec v^* la vitesse de cisaillement,

τ_0 la contrainte de cisaillement à la paroi.

Comme les équations de bilans, les équations de transport de k et de ε peuvent s'écrire sous la forme générale (89), les expressions de ϕ, Γ et S étant données le tableau **2**.

L'ensemble des dix équations : sept équations de transport, l'équation (98) de la viscosité turbulente en fonction de k et ε et les deux équations d'état permettent, compte tenu des valeurs attribuées aux diverses constantes, de calculer les dix paramètres : ρ, V_i, $< P >$, T, H, k, ε, et μ_t. Cependant, compte tenu de sa complexité, ce système d'équations ne peut être résolu que par des **méthodes numériques de différences**, **de volumes ou d'éléments finis** avec prise en compte des conditions aux limites et des conditions initiales (voir par exemple [14]).

Certaines sociétés de service proposent des logiciels, basés sur cette méthode et adaptés à la résolution de beaucoup de problèmes industriels.

4.3.3.2.3 Modèle RNG k, ε (RNG : *Renormalization Group*)

Notons également, dans ce type de modèle k, ε, l'existence d'un modèle plus récent (Yakhot et Orszag [15]), basé sur la théorie du groupe de renormalisation : le **modèle RNG *k***, ε (Renormalization Group model). Dans ce modèle, les équations de transport de k et de ε sont modifiées comme suit :

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \frac{\partial \rho V_j\, k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\alpha_k\, \mu_{\text{eff}} \frac{\partial k}{\partial x_j}\right] + \mu_t\, S^2 - \rho\, \varepsilon \qquad \textbf{(103)}$$

$$\left(\frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \rho V_j\, \varepsilon}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\alpha_\varepsilon\, \mu_{\text{eff}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}\right] + C_{\varepsilon 1}\, \frac{\varepsilon}{k}\, \mu_t\, S^2 - C_{\varepsilon 2}\, \rho \frac{\varepsilon^2}{k} - R \qquad \textbf{(104)}$$

avec $\mu_{\text{eff}} = \mu\left(1 + \sqrt{\frac{C_\mu}{\mu}}\sqrt{\rho}\, \frac{k}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^2$,

S le module du tenseur des taux de déformation, dont les composantes sont :

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right)$$

et qui est défini par $S = \sqrt{2 S_{ij} S_{ij}}$

$$R = \frac{C_\mu \rho \eta^3\left(1 - \dfrac{\eta}{\eta_0}\right)\varepsilon^2}{(1 + \beta \eta^3)\, k}$$

avec $\eta = \dfrac{Sk}{\varepsilon}$; $\eta_0 \approx 4{,}38$ et $\beta = 0{,}012$

α_k et α_ε les inverses des nombres de Prandtl effectifs pour k et ε.

Dans ce modèle, les différentes constantes ne sont plus déterminées de façon empirique mais à l'aide de la théorie du groupe de renormalisation. On obtient alors les valeurs suivantes :

$$C_\mu = 0{,}0845\ ;\ C_{\varepsilon 1} = 1{,}42\ ;\ C_{\varepsilon 2} = 1{,}68\ ;\ \alpha_k = \alpha_\varepsilon = 1{,}393$$

4.3.3.3 Modèle aux tensions de Reynolds - RSM

Contrairement aux modèles précédents qui utilisent la formulation de Boussinesq, le **modèle RSM** (*Reynolds Stress Model*) conserve telles quelles les tensions de Reynolds $< v_i' v_j' >$. Ce modèle, qui utilise des équations de transport pour les tensions de Reynolds, est plus précis que les précédents dans le cas des écoulements complexes car, contrairement aux modèles k, ε, l'hypothèse d'une turbulence isotrope n'est pas utilisée.

Le développement de ce modèle dépassant le cadre de cet article, le lecteur qui souhaite avoir plus d'informations pourra se reporter, par exemple, à Cousteix [7] ou Schistel [6].

Tableau 3 – Coefficients et fonctions des équations de transport *k*, ϵ

Auteurs ou configurations	C_μ	$C_{\varepsilon 1}$	$C_{\varepsilon 2}$	σ_k	σ_ε	f_μ	f_1	f_2
Hauts *Re*	0,09	1,44	1,92	1,0	1,3	1,0	1,0	1,0
Jones-Launder	0,09	1,45	2,0	1,0	1,3	$\exp[-2{,}5/(1 + Re_t/50)]$	1,0	$1 - 0{,}3\ \exp(-Re_t^2)$
Hassid-Porch	0,09	1,45	2,0	1,0	1,3	$1 - \exp(-0{,}015\ Re_t)$	1,0	$1 - 0{,}3\ \exp(-Re_t^2)$
Hoffman	0,09	1,81	2,0	2,0	3,0	$\exp[-1{,}75/(1 + Re_t/50)]$	1,0	$1 - 0{,}3\ \exp(-Re_t^2)$
Launder-Scharma	0,09	1,44	1,92	1,0	1,3	$\exp[-3{,}4/(1 + Re_t/50)^2]$	1,0	$1 - 0{,}3\ \exp(-Re_t^2)$
Dutoya-Michard	0,09	1,35	2,0	0,9	0,95	$1 - 0{,}86\ \exp[-(Re_t/600)^2]$	$1 - 0{,}4\ \exp[-Re_t/50)^2]$	$1 - 0{,}3\ \exp[(Re_t/50)^2]$
Chien	0,09	1,35	1,8	1,0	1,3	$1 - \exp(-0{,}0115\ y^+)$	1,0	$1 - 0{,}22\ \exp[Re_t/6)^2]$
Reynolds	0,084	1,0	1,83	1,09	1,3	$1 - \exp(-0{,}0198 Re_n)$	1,0	$\{1 - 0{,}3\ \exp[(Re_t/3)^2]\}f_\mu$
Lam-Bremhorst	0,09	1,44	1,92	1,0	1,3	$[1 - \exp(-0{,}0165 Re_n)]^2\ (1 + 20{,}5/Re_t)$	$1 + (0{,}05/f_\mu)^3$	$1 - \exp(-Re_t^2)$
Nagano-Hishida	0,09	1,45	1,9	1,0	1,3	$[1 - \exp(y^+/26{,}5)]$	1,0	$1 - 0{,}3\ \exp(-Re_t^2)$

Toute reproduction sans autorisation du Centre français d'exploitation du droit de copie est strictement interdite.
©Techniques de l'Ingénieur, traité Génie énergétique

4.3.3.4 Conclusion

En réalité, il n'existe pas de modèle de turbulence polyvalent. Le choix dépend de la configuration étudiée, de la précision désirée, mais aussi des ressources informatiques disponibles. La plupart des modèles restent très perfectibles dans les zones d'écoulement où les gradients de vitesse sont importants. Ils nécessitent alors la mise en place de corrections, par exemple par adjonction d'une fonction d'amortissement, pour représenter les effets « à bas nombre de Reynolds » (de telles fonctions apparaissent dans les équations (94) et (99)). On peut également, dans les zones de proximité immédiate de parois, utiliser les **lois de parois** donnant directement la **valeur de la vitesse** pariétale, comme celle qui est présentée dans l'article [BE 8 161], § 1.3.

5. Écoulements réactifs

Dans certains écoulements, plusieurs espèces sont en présence. C'est notamment le cas des écoulements dits « réactifs », c'est-à-dire des écoulements dans lesquels il y a des réactions chimiques, de combustion par exemple, mais c'est aussi, et plus généralement, le cas lorsqu'il y a des gaz de nature différente à concentrations variables dans l'espace et dans le temps. Comme pour les autres grandeurs, il convient alors de faire un bilan sur chaque espèce présente dans l'écoulement. Ce bilan est totalement analogue aux bilans des autres paramètres de l'écoulement.

Si on note par N_n la concentration molaire (nombre de moles par unité de volume) de l'espèce n en un point donné de l'écoulement, le première **loi de Fick**, analogue à la loi de Fourier pour les transferts conductifs de chaleur, donne le **transfert diffusif** de l'espèce n en fonction du gradient de concentration :

$$\boldsymbol{J}_{Nn} = -D\,\mathbf{grad}\,N_n \qquad (105)$$

avec
- $\boldsymbol{J}_{Nn}$ le vecteur densité du flux molaire de l'espèce n [exprimé en mol/(m^2.s)],
- D le coefficient de diffusion de l'espèce n dans le mélange (en m^2/s).

Si c_n est la fraction massique de l'espèce n dans le mélange (en kilogramme de l'espèce n par kilogramme de mélange), la **densité de flux massique** par diffusion est donnée par :

$$\boldsymbol{J}_{mn} = -D\,\mathbf{grad}\,\rho c_n \qquad (106)$$

où $\boldsymbol{J}_{mn}$ est en kg/(m^2.s). En général, dans cette expression du flux diffusif, la variation de la masse volumique est négligeable devant la variation de la fraction massique. Ainsi, l'expression (86) peut être remplacée par :

$$\boldsymbol{J}_{mn} = -\rho D\,\mathbf{grad}\,c_n \qquad (107)$$

Le **transport** de l'espèce n dû à l'écoulement global à travers l'unité de surface étant donné par l'expression générale : $\rho c_n \boldsymbol{v}$, le **bilan de l'espèce** n s'exprime par l'équation de transport suivante :

$$\frac{\partial \rho c_n}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_j c_n}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\rho D \frac{\partial c_n}{\partial x_j}\right] + S_n \qquad (108)$$

où S_n est un terme de production volumique de l'espèce n, production (positive ou négative) due, par exemple, à une réaction de combustion. S_n est nulle dans le cas où les espèces sont conservées. Le coefficient de diffusion D étant lié à la viscosité cinématique par le **nombre de Schmidt** $Sc = \nu / D$, on peut écrire :

$$\frac{\partial \rho c_n}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_j c_n}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\mu}{Sc} \frac{\partial c_n}{\partial x_j}\right] + S_n \qquad (109)$$

Dans le cas d'un **écoulement turbulent**, la fraction massique c_n est aussi fluctuante. On peut lui appliquer la décomposition de Reynolds :

$$c_n = C_n + c_n'$$

Ainsi, suivant un développement analogue à celui qui a été fait pour la masse globale, la quantité de mouvement ou l'énergie, on peut écrire :

$$\frac{\partial \rho C_n}{\partial t} + \frac{\partial \rho V_j C_n}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\frac{\mu}{Sc} + \frac{\mu_t}{Sc_t}\right) \frac{\partial c_n}{\partial x_j}\right] + \langle S_n \rangle \qquad (110)$$

avec
- Sc_t le nombre de Schmidt turbulent dont la valeur est, en général, prise égale à une constante (l'unité par exemple),
- $\langle S_n \rangle$ est la valeur moyenne de la production de l'espèce n.

L'équation (110) ayant la forme générale des équations statistiques de transport, on peut la mettre sous la forme générale (89). Pour cette forme, les paramètres ϕ et Γ sont aussi donnés dans le tableau **2**.

Ainsi, dans le cas des écoulements comportant plusieurs espèces, réactives ou non, aux dix équations mentionnées dans le paragraphe 4.3.3.2.2, il convient d'ajouter autant d'équations (110) qu'il y a d'espèces en présence.

Notations et Symboles

Symbole	Unité	Définition	Symbole	Unité	Définition
a	Pa.m^{-1}	Perte de pression par unité de longueur	T_{ij}'	Pa	Projection dans la direction i de la contrainte visqueuse sur la face d'orientation j
a	m^2.s^{-1}	Diffusivité thermique	u, U	m.s^{-1}	Vitesses caractéristiques
C		Coefficients des équations de fermeture	V	m.s^{-1}	Vitesses d'écoulement potentiel ou vitesse à l'infini, ou vitesse moyenne
c		Concentration massique	$\boldsymbol{V}$	m.s^{-1}	Vecteur vitesse moyenne
c_p	J.kg^{-1}.K^{-1}	Capacité thermique massique du fluide à pression constante	$\dot{V}$	m^3.s^{-1}	Débit volumique
D	m	Diamètre de la canalisation	$\boldsymbol{v}$	m.s^{-1}	Vecteur vitesse instantanée
D	m^2.s^{-1}	Coefficient de diffusion	$\bar{\boldsymbol{v}}$	m.s^{-1}	Moyenne temporelle du vecteur vitesse instantanée
F	N	Force exercée sur le fluide	$\bar{v}$	m.s^{-1}	Vitesse moyenne
F		Fonction de Blasius	$\langle \boldsymbol{v} \rangle$	m.s^{-1}	Moyenne stochastique du vecteur vitesse instantanée

Toute reproduction sans autorisation du Centre français d'exploitation du droit de copie est strictement interdite.
© Techniques de l'Ingénieur, traité Génie énergétique

Notations et Symboles

Symbole	Unité	Définition	Symbole	Unité	Définition
g	m.s^{-2}	Accélération de la pesanteur	V'	m.s^{-1}	Vitesse caractéristique selon la direction normale à la paroi
g_i	m.s^{-2}	Composante selon la direction i de l'accélération de la pesanteur	$\boldsymbol{v}'$	m.s^{-1}	Composante fluctuante du vecteur vitesse instantanée
g		Grandeur quelconque	$< v_i >$	m.s^{-1}	Composante selon i de la valeur moyenne de la vitesse
$\bar{g}$, G		Moyenne temporelle d'une grandeur quelconque	v_i'	m.s^{-1}	Composante selon i de la valeur fluctuante de la vitesse
$< g >$, G		Moyenne stochastique d'une grandeur quelconque	V_i	m.s^{-1}	Composante selon la direction i de la vitesse moyenne
g'		Composante fluctuante d'une grandeur quelconque	v_i	m.s^{-1}	Composante selon i de la vitesse instantanée
h	J.kg^{-1}	Enthalpie massique	$\dot{W}$	W	Puissance
H	J.kg^{-1}	Enthalpie massique moyenne	x_i	m	Coordonnée selon la direction i
J	m	Perte de charge	z	m	Altitude
J_N	mol.m^{-2}.s^{-2}	Densité de flux molaire	δ	m	Épaisseur de la couche limite
J_m	kg.m^{-2}.s^{-2}	Densité de flux massique	δ_{ij}		Symbole de Kronecker (= 1 si $i = j$; = 0 si $i \neq j$)
j		Perte de charge par unité de longueur	ε	W.kg^{-1}	Taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente
k	J.kg^{-1}	Énergie cinétique turbulente	Φ	W.m^{-3}	Fonction de dissipation
ℓ , L	m	Longueurs caractéristiques	ϕ		Paramètre physique objet du bilan
$\dot{M}$	kg.s^{-1}	Débit massique	γ	m.s^{-2}	Accélération
N		Concentration molaire	Γ	Pa.s	Coefficient de diffusion
P	Pa	Pression	η	Pa.s	Viscosité de dilatation
P^*	Pa	Pression étoilée ; $P^* = P + \varpi z$	η		Coordonnée réduite normale à la paroi
P^*/ϖ	m	Hauteur piézométrique	λ	W.m^{-1}.K^{-1}	Conductivité thermique du fluide
Pe		Nombre de Péclet ; $Pe = VL / a$	μ	Pa.s	Viscosité dynamique moléculaire
Pr		Nombre de Prandtl ; $Pr = \nu / a$	μ_t	Pa.s	Viscosité dynamique turbulente
R	m	Rayon de la canalisation	ν	m^2.s^{-1}	Viscosité cinématique moléculaire
r	m	Distance radiale	ψ	m^2.s^{-1}	Fonction de courant
Re		Nombre de Reynolds ; $Re = VL / \nu$	ρ	kg.m^{-3}	Masse volumique
S		Terme source	σ		Nombre de Prandtl relatif à k ou à ε
t	s	Temps	τ	s	Temps caractéristique
T	K	Température	ϖ	N.m^{-3}	Poids volumique
T	s	Temps caractéristique	Ω	m^2	Surface frontière

Liste des Indices

c	Capable de la puissance cinétique	QM	Capable de la quantité de mouvement
d	Capable du débit	T	Thermique
i, j, k	Direction de projection	t	Transition, turbulent
k	Relatif à la microéchelle ou échelle de Kolmogorov, relatif à k	ε	Relatif à ε
ℓ	Relatif à la longueur ℓ	μ	Relatif à la viscosité
L	Relatif à la longueur moyenne L	Θ	Enthalpique
m	Mélange, moyenne	0	Section de référence
n	Espèce n	1, 2	Relatif à l'amont et à l'aval respectivement
qm	Quantité de mouvement	∞	A l'infini
max	Maximum		

Toute reproduction sans autorisation du Centre français d'exploitation du droit de copie est strictement interdite.
©Techniques de l'Ingénieur, traité Génie énergétique

Références bibliographiques

[1] CANDEL (S.). – *Mécanique des fluides.* Dunod Université (1990).

[2] PADET (J.). – *Fluides en écoulement.* Masson (1990).

[3] COUSTEIX (J.). – *Couche limite laminaire.* Cepadues-Éditions, Toulouse (1988).

[4] GOUYON (E.), HULIN (J.-P.) et PETIT (L.). – *Hydrodynamique Physique.* CNRS Éditions (1991).

[5] LESIEUR (M.). – *La turbulence.* Presses Universitaires de Grenoble (1994).

[6] SCHISTEL (R.). – *Les écoulements turbulents. Modélisation et simulation.* Hermès (1998).

[7] COUSTEIX (J.). – *Turbulence et couche limite.* Cepadues-Éditions, Toulouse (1989).

[8] WHITE (F.-M.). – *Viscous Fluid Flow.* MacGraw-Hill Int. Ed. (1991).

[9] CHO (H.-H.) et GOLDSTEIN (R.-J.). – *An improved low Reynolds number k-ε turbulence model for recirculating flows.* Int. J. Heat Mass Transfer 37, 10 (1994) 1495-1508.

[10] HENKES (R.-A.) et HOOGENDORN (C.-J.). – *Comparison of Turbulence Models for the Natural Convection Boundary Layer Along a Heated Vertical Plate.* Int. J. Heat Mass Transfer 37, 10 (1989) 1495-1508.

[11] NAGANO (Y.) et HISHIDA (M.). – *Improved form of the k-ε model for wall turbulent shear flows.* Transactions of the ASME, Journal of Fluid Engineering 109 (1987) 156-160.

[12] PATEL (V.-C.), RODI (W.) et SCHEUERER (G.). – *Turbulence models for near-wall and low Reynolds number flows : a review.* AIAA Journal 23, 9 (1987) 1308-1319.

[13] RODI (W.) et MANSOUR (N.-N.). – *Low Reynolds number k-ε modelling with the aid of direct simulation data.* Fluid Mech 250 (1993) 509-529.

[14] VERSTEEG (H.-K.) et MALALASEKERA (W.). – *An Introduction to Computational Fluid Dynamics.* Longman Scientific & Technical (1995).

[15] YAKHOT (V.) et ORSZAG (S.-A.). – *Renormalisation Group Analysis of Turbulence, I. Basic Theory.* J. Sc. Comput. 1, 1 (1986) 1-51.

Toute reproduction sans autorisation du Centre français d'exploitation du droit de copie est strictement interdite.
© Techniques de l'Ingénieur, traité Génie énergétique